



UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO GRANDE DO NORTE



---

---

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

---

---

*Material didático*  
*Álgebra Linear*

*Deusdedit Medeiros*

*Hector Salazar*

*Jossana Ferreira*

2010.1



## Prefácio

A Álgebra Linear a cada dia se mostra mais útil às ciências e às engenharias e há muito se tornou parte essencial do conhecimento básico dessas áreas.

Este texto foi desenvolvido a fim de auxiliar o aluno do curso de Bacharelado em Ciências e Tecnologia, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, na disciplina de Álgebra Linear, sendo um material norteador, pois consiste de resumos onde o objetivo principal é servir de guia para o estudo em livros da área.

O material ainda engloba a indicação de exercícios necessários ao entendimento da disciplina, sendo estimulada a resolução comparativa utilizando o computador.

# Conteúdo

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Contents</b>                                    | <b>i</b>  |
| <b>Preface</b>                                     | <b>1</b>  |
| <b>1 Matrizes</b>                                  | <b>3</b>  |
| 1.1 Introdução . . . . .                           | 3         |
| 1.2 Operações com Matrizes . . . . .               | 4         |
| 1.2.1 Soma . . . . .                               | 4         |
| 1.2.2 Multiplicação por um Escalar . . . . .       | 5         |
| 1.2.3 Multiplicação de Matrizes . . . . .          | 6         |
| 1.3 Equivalência entre Matrizes . . . . .          | 7         |
| <b>2 Determinantes</b>                             | <b>9</b>  |
| 2.1 Introdução . . . . .                           | 9         |
| 2.2 Cálculo do Determinante . . . . .              | 10        |
| 2.3 Propriedades do Determinante . . . . .         | 12        |
| <b>3 Inversão de Matrizes</b>                      | <b>13</b> |
| 3.1 Introdução . . . . .                           | 13        |
| 3.2 Determinando a Inversa de uma Matriz . . . . . | 14        |
| 3.3 Matriz Adjunta . . . . .                       | 16        |
| <b>4 Sistema de Equações Lineares</b>              | <b>19</b> |
| 4.1 Introdução . . . . .                           | 19        |

|                     |  |           |
|---------------------|--|-----------|
| 4.2                 | Regra de Cramer . . . . .              | 20        |
| 4.3                 | Resolvendo um Sistema Linear . . . . . | 21        |
| 4.4                 | Eliminação Gaussiana . . . . .         | 22        |
| <b>Bibliography</b> |  | <b>25</b> |

# Capítulo 1

## Matrizes

### 1.1 Introdução

Definimos uma **matriz**  $m \times n$  como um reticulado retangular de  $m$  linhas e  $n$  colunas, preenchida pelos **elementos**  $a_{ij}$ , que podem ser números, reais ou complexos, funções, outras matrizes, etc. Denotamos uma matriz  $A_{m \times n}$  como

$$(1.1) \quad A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onde a **ordem** da matriz é determinada pelo número de linhas e colunas, ou seja, ordem  $m \times n$ .

Chamamos a matriz de ordem  $m \times 1$  de **matriz coluna**, enquanto que a de ordem  $1 \times n$  chamamos de **matriz linha**, como as respectivas matrizes,

$$(1.2) \quad B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, C_{1 \times 5} = [ -1 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad -2 ].$$

Quando uma matriz tem todos os seus elementos iguais a zero, isto é,  $a_{ij} = 0$  para todo  $i$  e  $j$ , a chamamos de **matriz nula**; por exemplo,

$$(1.3) \quad A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0}.$$

Aqui,  $\mathbf{0}$  é a matriz nula  $3 \times 2$ . Uma **matriz quadrada** é aquela de ordem  $m \times m$ , ou seja, que o número de linhas é igual ao número de colunas. Quando uma matriz quadrada é tal que  $a_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ , isto é, os elementos que não estão na **diagonal principal** (constituída por todos os elementos em que  $i = j$ ) são nulos, dizemos que esta é uma **matriz diagonal**. Um exemplo é a matriz

$$(1.4) \quad A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Se a matriz é quadrada e  $a_{ij} = a_{ji}$  temos a **matriz simétrica**, como por exemplo,

$$(1.5) \quad A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} a & p & q & k \\ p & b & u & v \\ q & u & c & t \\ k & v & t & d \end{bmatrix}.$$

Chamamos de **matriz triangular superior** a matriz quadrada onde  $a_{ij} = 0$  para todo  $i > j$ ; nesta matriz, todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Analogamente, dizemos que a **matriz triangular inferior** é aquela onde  $a_{ij} = 0$  para todo  $i < j$ ; nesta matriz, todos os elementos acima da diagonal principal são nulos. Respectivamente, temos os exemplos,

$$(1.6) \quad M_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, chamamos de **matriz identidade** a matriz quadrada que possui todos os elementos  $a_{ii} = 1$ , com os elementos  $a_{ij} = 0$  para todo  $i \neq j$ . A representamos por  $\mathbb{I}_n$ , onde  $n$  indica sua ordem. Como exemplos,

$$(1.7) \quad \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbb{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Operações com Matrizes

### 1.2.1 Soma

Quando somamos duas matrizes de **mesma ordem**  $A_{m \times n}$  e  $B_{m \times n}$ , com os respectivos elementos  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ , obtemos outra matriz de ordem  $C_{m \times n}$ , cujos elementos são

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Como exemplo, consideramos as matrizes  $A$  e  $B$ ,

$$(1.8) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

tal que a soma entre elas é a matriz  $C$ ,

$$(1.9) \quad C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, se subtramos  $B$  de  $A$ , obtemos a matriz  $D$ ,

$$(1.10) \quad D = A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que escrevemos as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  nas equações do exemplo acima sem colocar a ordem  $2 \times 3$  subscrita, pois a descrição das mesmas deixa clara esta informação.

Agora, tomamos as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $\mathbf{0}$  (matriz nula), de mesma ordem  $m \times n$ , e descrevemos as propriedades da soma de matrizes:

- a)  $A + B = B + A$  (*comutativa*)
- b)  $A + (B + C) = (A + B) + C$  (*associativa*)
- c)  $A + \mathbf{0} = A$

### 1.2.2 Multiplicação por um Escalar

Seja a matriz  $A_{m \times n}$  dada na (1.1) e um escalar  $k$ . Daí, definimos produto deste escalar por aquela matriz como

$$(1.11) \quad k \cdot A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Como exemplo, podemos multiplicar o escalar 2 pela matriz  $A$  dada na expressão (1.8), ou seja,

$$(1.12) \quad 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se tomamos as matrizes  $A$  e  $B$ , de ordem  $m \times n$ , e os escalares  $k_1$  e  $k_2$ , encontramos as seguintes propriedades:

- a)  $k_1 \cdot (A + B) = k_1 \cdot A + k_1 \cdot B$   
 b)  $(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A$   
 c)  $0 \cdot A = \mathbf{0}$  (0 é escalar nulo e  $\mathbf{0}$  é a matriz nula)  
 d)  $k_1(k_2 \cdot A) = (k_1 k_2) \cdot A$

### 1.2.3 Multiplicação de Matrizes

Consideramos agora duas matrizes  $A$  e  $B$ , com a ordem de  $A$  sendo  $m \times p$  e a de  $B$  sendo  $p \times n$ , onde seus respectivos termos gerais são  $a_{ik}$  e  $b_{kj}$ . Se fazemos o produto  $A \cdot B$ , obtemos uma terceira matriz  $C$  de ordem  $m \times n$ , com termo geral  $c_{ij}$ , tal que

$$(1.13) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p (a_{ik} \cdot b_{kj}).$$

Como exemplo, temos

$$(1.14) \quad A \cdot B = C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observamos que em geral este produto não comuta, ou seja, usualmente  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . Se tomamos o exemplo anterior, temos

$$(1.15) \quad B \cdot A = D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix},$$

onde claramente  $C$  é diferente de  $D$ .

Covém-nos algumas vezes fazer a **transposição** de uma dada matriz, considerando as linhas desta como sendo as colunas de uma nova matriz. Daí, se temos a matriz  $A$ , com termo geral  $a_{ij}$  e de ordem  $m \times n$ , definimos a matriz **transposta** de  $A$ , denotando-a por  $A^T$ , com termo geral  $a_{ij}^t$  e de ordem  $n \times m$ , tal que  $a_{ij}^t = a_{ji}$ . Tomamos a matriz  $A$  abaixo como exemplo e encontramos sua transposta  $A^T$ , ou seja,

$$(1.16) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Observamos que encontramos também na literatura a transposta de  $A$  escrita como  $A'$ .

Aqui, definimos a matriz **simétrica**  $A$  como uma matriz quadrada, tal que ela é igual a sua transposta, ou seja,  $A = A^T$ . Quando a matriz quadrada é o negativo da sua transposta dizemos que esta matriz é **antisimétrica**, isto é,  $A = -A^T$ .

Agora, listamos várias propriedades inerentes às operações com matrizes, desde que estas operações sejam possíveis:

- a)  $A \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot A = A$
- b)  $A(B + C) = AB + AC$  (*distributiva à esquerda*)
- c)  $(A + B)C = AC + BC$  (*distributiva à direita*)
- d)  $A(BC) = (AB)C$  (*associativa*)
- e)  $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$
- f) Uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual a sua transposta, isto é,  $A_{n \times n} / a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A_{n \times n} = A_{n \times n}^T$
- g)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
- h)  $(A^T)^T = A$
- i)  $(kA)^T = kA^T$
- j)  $(AB)^T = B^T A^T$  (*atenção com a ordem do produto*)

## 1.3 Equivalência entre Matrizes

Apresentamos a seguir as três **operações elementares** que aplicamos às linhas (ou às colunas) de uma matriz, tal que obtemos uma nova matriz equivalente à primeira:

- (i) troca de duas linhas (duas colunas) entre si;
- (ii) multiplicação de todos os elementos de uma linha (uma coluna) por um escalar diferente de zero;
- (iii) substituição de uma linha (uma coluna) pela soma dela própria com um múltiplo de outra linha (outra coluna).

Observamos que estas operações básicas são reversíveis, já que tratam de somas e multiplicações entre números, bem como podem ser aplicadas a qualquer matriz. Quando aplicamos uma ou mais dessas operações elementares numa matriz  $A$  qualquer e obtemos uma matriz  $B$ , dizemos que a matriz  $B$  é **equivalente** á matriz  $A$ , ou simbolicamente,  $B \sim A$ . Como exemplo, tomamos a matriz  $A$  e fazemos algumas operações elementares nas linhas, isto é,

$$(1.17) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se multiplicamos a primeira linha ( $L_1$ ) da matriz  $A$  por  $-2$ , encontramos a matriz  $A_1$ ,

$$(1.18) \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Quando somamos a primeira linha com a segunda linha ( $L1+L2$ ) de  $A_1$ , substituindo esta última ( $L2$ ), chegamos à  $A_2$ ,

$$(1.19) \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Também, se trocamos as duas linhas ( $L1 \leftrightarrow L2$ ) de  $A$ , temos a matriz  $A_3$ ,

$$(1.20) \quad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, vemos acima que  $A_3 \sim A$ ,  $A_2 \sim A$ , bem como  $A_2 \sim A_1$ .

# Capítulo 2

## Determinantes

### 2.1 Introdução

Toda matriz quadrada  $A$ , cujo termo geral é  $a_{ij}$ , tem um número associado a ela, o qual chamamos de **determinante**, que representamos por  $\det(A)$ . O encontramos denotado também na literatura como  $|A|$  ou  $\det(a_{ij})$ . Já sabemos que a solução do sistema linear de duas equações com duas incógnitas ( $x_1$  e  $x_2$ ),

$$(2.1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

é dada por

$$(2.2) \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{\det(A)},$$

onde  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  é o determinante da matriz  $A$  de ordem  $2 \times 2$ , formada pelos coeficientes do sistema, ou seja,

$$(2.3) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Este raciocínio se repete para qualquer sistema de  $n$  equações com  $n$  incógnitas, quando todas as operações são possíveis, onde  $\det(A)$  é o determinante da matriz quadrada  $A$  de ordem  $n \times n$ , formada pelos coeficientes do sistema. No caso particular em que  $n = 3$ , por exemplo, temos que

$$(2.4) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

com

$$(2.5) \quad \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Observamos que a expressão acima (2.5) ainda pode ser escrita como

$$(2.6) \quad \det(A) = a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$

como também

$$(2.7) \quad \det(A) = a_{11} \cdot \det(A)_{11} - a_{12} \cdot \det(A)_{12} + a_{13} \cdot \det(A)_{13}.$$

Aqui, obtemos a **submatriz**  $A_{11}$  eliminando a primeira linha e a primeira coluna, a submatriz  $A_{12}$  eliminando a primeira linha e a segunda coluna e a submatriz  $A_{13}$  eliminando a primeira linha e a terceira coluna. Daí, para qualquer matriz quadrada  $A$ , obtemos a submatriz  $A_{ij}$  eliminando a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna.

## 2.2 Cálculo do Determinante

Agora, estendemos o raciocínio expresso na seção anterior e definimos o determinante de uma matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n \times n$  e termo geral  $a_{ij}$ , como

$$(2.8) \quad \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A)_{1j}.$$

Como exemplo, determinamos o determinante da matriz  $A$ ,

$$(2.9) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}(2)\det \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ (-1)^{1+2}(-1)\det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ (-1)^{1+3}(0)\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= 2(0 - 9) + 1(0 - 0) + 0(-3 - 0) \\ &= -18 \end{aligned}$$

Observamos que se trocamos a primeira com a terceira linha da matriz  $A$  acima (2.9), obtemos uma matriz  $B$  equivalente a  $A$ ,  $B \sim A$ , tal que ao calcularmos o determinante de  $B$  encontramos o valor negativo do determinante de  $A$ , ou seja,  $\det(B) = -\det(A)$ . A vantagem nesta operação está no fato de que a matriz  $B$  possui dois elementos nulos na primeira linha, fazendo com que o cálculo do determinante seja mais simples,

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad \det(B) &= (-1)^{1+1}(0)\det(B)_{11} + (-1)^{1+2}(-3)\det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ (-1)^{1+3}(0)\det(B)_{13} \\
 &= 3(0 + 6) = 18 \\
 &= -\det(A)
 \end{aligned}$$

Agora, apresentamos a definição de determinante de uma outra forma, algumas vezes mais conveniente. Para isso, chamamos de **cofator** ( $C_{ij}$ ) de uma matriz  $A$  a expressão

$$(2.12) \quad C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A)_{ij},$$

onde eliminamos a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$  para obtermos a submatriz  $A_{ij}$ . Assim, calculamos o determinante de uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n \times n$  pela expansão do cofator com relação a alguma linha (ou coluna). Para a  $i$ -ésima linha de  $A$ , temos

$$(2.13) \quad \det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Finalizamos, por exemplo, achando o determinante da matriz  $A$ ,

$$(2.14) \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$(2.15) \quad \det(A) = (-2)(-1)^{3+1}\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-2)(-3)(-1)^{1+3}\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 (2.16) \quad &= 6(3 - (-2)) = 30.
 \end{aligned}$$

## 2.3 Propriedades do Determinante

De imediato, vemos que o determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é igual ao produto de todos os elementos da diagonal principal. Também, se obtemos uma matriz equivalente através de operações elementares, podemos alterar ou não o determinante da nova matriz. Assim, para uma matriz quadrada  $A$ , temos que

(i) quando trocamos duas linhas quaisquer de  $A$  entre si, obtemos uma nova matriz  $B$ , tal que  $\det(B) = -\det(A)$ ;

(ii) quando multiplicamos por um escalar  $k$  uma das linhas de  $A$ , obtemos uma nova matriz  $B$ , tal que  $\det(B) = k \cdot \det(A)$ ;

(iii) quando substituimos uma linha de  $A$  pela soma desta linha com um múltiplo de outra linha de  $A$ , obtemos uma nova matriz  $B$ , tal que  $\det(B) = \det(A)$ .

Como exemplo tomamos a matriz  $A$ ,

$$(2.17) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & -5 & 20 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 5 \cdot A_1,$$

tal que

$$(2.18) \quad \det(A) = 5 \cdot \det(A)_1 = 5(3) = 15.$$

Da mesma forma que realizamos as operações elementares com as linhas de uma matriz, podemos também realizar aquelas operações básicas com as colunas desta matriz. Como resultado disto, se trabalhamos com uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n \times n$ , concluímos que o determinante de  $A$  é o mesmo que o determinante da transposta de  $A$ , ou seja,

$$(2.19) \quad \det(A) = \det(A)^T.$$

Por fim, quando temos duas matrizes quadradas  $A$  e  $B$  de ordem  $n \times n$ , chegamos a relação de igualdade

$$(2.20) \quad \det(A)B = \det(A)\det(B).$$

# Capítulo 3

## Inversão de Matrizes

### 3.1 Introdução

Até que se afirme o contrário, tratamos nessa seção com matrizes quadradas de ordem  $n \times n$ , tal que, quando multiplicamos duas matrizes, obtemos sempre uma nova matriz de ordem  $n \times n$ . Assim, se a matriz  $A$  de ordem  $n \times n$  é **inversível**, existe então uma única matriz **inversa** para ela, denotada por  $A^{-1}$  e de ordem  $n \times n$  também, tal que o produto entre as duas resulta na matriz identidade de ordem  $n$ ,

$$(3.1) \quad AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_n.$$

Acrescentamos a esta definição que a inversa da matriz inversa é a própria matriz,

$$(3.2) \quad (A^{-1})^{-1} = A,$$

como também que a inversa da matriz transposta é a transposta da matriz inversa,

$$(3.3) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Quando temos duas matrizes inversíveis  $A$  e  $B$ , o produto entre elas é também inversível. Daí, encontramos a matriz inversa do produto  $AB$  multiplicando as inversas daquelas matrizes em ordem inversa, isto é,

$$(3.4) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Se temos o produto de muitas matrizes de ordem  $n \times n$ , por exemplo,  $ABCD$ , temos que

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (ABCD)^{-1} &= (BCD)^{-1}A^{-1} \\ &= (CD)^{-1}B^{-1}A^{-1} \\ &= D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}. \end{aligned}$$

Uma matriz útil para a obtenção da inversa de uma outra matriz é a **matriz elementar**. Portanto, obtemos uma matriz elementar de ordem  $n$ , denotada por  $\mathbb{E}$ , quando realizamos uma e somente uma operação elementar na matriz identidade  $\mathbb{I}_n$ . Vemos também que toda matriz elementar  $\mathbb{E}$  é inversível e a inversa dela,  $\mathbb{E}^{-1}$ , é uma matriz elementar que transforma  $\mathbb{E}$ , retornando à matriz identidade original. Como exemplo, a partir de  $\mathbb{I}_3$ , temos a matriz elementar  $\mathbb{E}_1$ ,

$$(3.6) \quad \mathbb{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

onde multiplicamos a segunda linha de  $\mathbb{I}_3$  por 3 e somamos o resultado à terceira linha desta ( $3L_2 + L_3$ ). Para obtermos  $\mathbb{I}_3$  de volta, usamos a matriz elementar  $\mathbb{E}_1^{-1}$ ,

$$(3.7) \quad \mathbb{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

onde multiplicamos a segunda linha de  $\mathbb{I}_3$  por  $-3$  e somamos o resultado à terceira linha desta ( $-3L_2 + L_3$ ). Aqui, vemos claramente que

$$(3.8) \quad \mathbb{E}_1 \mathbb{E}_1^{-1} = \mathbb{E}_1^{-1} \mathbb{E}_1 = \mathbb{I}_3.$$

## 3.2 Determinando a Inversa de uma Matriz

Seja uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n \times n$ . Existe um teorema mostrando que  $A$  é inversível se e somente se  $A$  é equivalente à matriz identidade  $\mathbb{I}_n$ , onde toda a sequência das operações elementares que leva  $A$  em  $\mathbb{I}_n$  leva também  $\mathbb{I}_n$  em  $A$ . Com isto, escrevemos uma matriz com os elementos de  $A$  e  $\mathbb{I}_n$ , nesta ordem ( $[A \quad \mathbb{I}_n]$ ), e verificamos se esta é equivalente à matriz com os elementos de  $\mathbb{I}_n$  e  $A^{-1}$ , nesta ordem ( $[\mathbb{I}_n \quad A^{-1}]$ ), determinando  $A^{-1}$ . Se não existe esta equivalência, a matriz  $A$  não possui inversa. Isto é verdade porque, se uma matriz  $A$  pode ser reduzida à matriz identidade  $\mathbb{I}_n$  por uma sequência finita de operações elementares, encontramos matrizes elementares  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2 \dots \mathbb{E}_k$ , tais que  $\mathbb{E}_k \dots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1 A = \mathbb{I}_n$  e  $A = \mathbb{E}_1^{-1} \mathbb{E}_2^{-1} \dots \mathbb{E}_k^{-1} \mathbb{I}_n$ , com  $A^{-1} = \mathbb{E}_k \dots \mathbb{E}_2 \mathbb{E}_1$ . A seguir, clareamos este método quando encontramos a inversa de

$$(3.9) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad (A \quad \mathbb{I}_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \\
 &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \\
 &\sim (\mathbb{I}_3 \quad A^{-1}).
 \end{aligned}$$

Observamos que a sequência de operações básicas que utilizamos acima foram  $(L2 + L3)$ ,  $(-2L1 + L3)$ ,  $(1/4L3)$ ,  $(-2L3 + L1)$ ,  $(-3L3 + L2)$  e  $(L1 \leftrightarrow L2)$ . Assim, identificamos a inversa de  $A$  (3.9) no final da (3.10), ou seja,

$$(3.11) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/4 & -3/4 \\ 2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

### 3.3 Matriz Adjunta

Primeiro definimos a **matriz dos cofatores** (2.12) de uma dada matriz quadrada  $A$ , denotada por  $\overline{A}$ , ou seja,

$$(3.12) \quad \overline{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1j} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nj} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Daí, chamamos de **matriz adjunta** de  $A$ , escrita como  $\text{adj}A$ , a matriz transposta da matriz dos cofatores de  $A$ , isto é,

$$(3.13) \quad \text{adj}A = (\overline{A})^T.$$

Seja o exemplo de uma matriz  $A$  de ordem  $3 \times 3$ ,

$$(3.14) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

tal que achamos a matriz dos cofatores de  $A$ ,

$$(3.15) \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} -14 & 7 & 7 \\ 2 & -3 & -5 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vemos facilmente que a adjunta de  $A$  dada por

$$(3.16) \quad \text{adj}A = \begin{bmatrix} -14 & 2 & -4 \\ 7 & -3 & -1 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

No exemplo acima, quando fazemos o produto da matriz  $A$  pela sua adjunta, obtemos

$$(3.17) \quad \begin{aligned} A \text{ adj}A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 & 2 & -4 \\ 7 & -3 & -1 \\ 7 & -5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} = -14 \cdot \mathbb{I}_3. \end{aligned}$$

Mas, observamos aqui que o determinante daquela matriz  $A$  é  $-14$ , tal que

$$(3.18) \quad A \cdot adjA = -14 \cdot \mathbb{I}_3.$$

Assim, temos a seguinte propriedade para todas as matrizes  $A$  de ordem  $n \times n$ ,

$$(3.19) \quad A \cdot adjA = detA \cdot \mathbb{I}_n.$$





seja,

$$(4.3) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

## 4.2 Regra de Cramer

Seja um sistema de  $n$  equações com  $n$  incgnitas,

$$(4.4) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Aqui, todos os coeficientes  $a_{ij}$  formam a **matriz dos coeficientes**  $A$  de ordem  $n \times n$ ,

$$(4.5) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

todas as incógnitas formam a matriz  $X$  e todos os termos independentes formam a matriz  $B$ , ambas de ordem  $n \times 1$ , respectivamente,

$$(4.6) \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A **Regra de Cramer** afirma que "se  $A$  é uma matriz de ordem  $n \times n$  que possui inversa, para todo os  $b_i$  pertencentes ao conjunto dos números reais, a solução do sistema, ou seja, de  $AX = B$ , tem suas componentes  $x_i$  dadas por

$$(4.7) \quad x_i = \frac{\det(A)_i}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde a matriz  $A_i$  é obtida quando substituímos os elementos da  $i$ -ésima coluna de  $A$  pelos elementos dos termos independentes”.

A partir da Regra de Cramer chegamos a uma fórmula geral para a inversa de uma matriz quadrada. Assim, se  $A$  é uma matriz inversível de ordem  $n \times n$ , temos que

$$(4.8) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}A.$$

Decorrente desta regra e da inversa de uma matriz, concluímos que uma matriz quadrada  $A$  é inversível se e somente se  $\det(A) \neq 0$ .

### 4.3 Resolvendo um Sistema Linear

Um outro caminho para encontrarmos o conjunto solução de um sistema linear é encontrar um sistema equivalente, tal que este último seja mais fácil de se trabalhar. Para isso, temos um método com consiste de três passos:

- (i) trocar duas equações entre si;
- (ii) multiplicar toda uma equação do sistema por uma constante diferente de zero;
- (iii) somar um múltiplo de uma equação com outra equação.

Mas, observamos que este procedimento é o mesmo das operações elementares aplicadas às linhas de uma matriz, que apresentamos na seção (1.3). Exemplificamos este método resolvendo o sistema linear abaixo, onde fazemos paralelamente as mesmas operações elementares nas linhas da matriz completa. Assim, seja o sistema de equações lineares com a respectiva matriz completa, dado por

$$(4.9) \quad \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 4z = 20 \\ 2x + 3y + 5z = 25 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 20 \\ 2 & 3 & 5 & 25 \end{bmatrix}.$$

Agora, realizamos as operações  $(-2L1 + L2)$  e  $(-2L1 + L3)$ ,

$$(4.10) \quad \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 0x - y + 2z = 0 \\ 0x + 1y + 3z = 5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Aqui, fazemos as operações  $(L2 + L1)$  e  $(L2 + L3)$ ,

$$(4.11) \quad \begin{cases} x + 0y + 3z = 1 \\ 0x - y + 2z = 0 \\ 0x + 0y + 5z = 5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, tomamos  $(-L2)$  e  $(1/5L3)$ ,

$$(4.12) \quad \begin{cases} x + 0y + 3z = 10 \\ 0x + y - 2z = 0 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, realizamos as operações  $(-3L3 + L1)$  e  $(2L3 + L2)$ ,

$$(4.13) \quad \begin{cases} x + 0y + 0z = 7 \\ 0x + y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema inicial é equivalente ao sistema acima (4.13), com a solução  $x = 7$ ,  $y = 2$  e  $z = 1$ .

## 4.4 Eliminação Gaussiana

Iniciamos definindo o **elemento líder** de uma linha numa matriz, que é o primeiro elemento de uma linha não-nula, da esquerda para a direita desta linha, diferente de zero. Com isto, temos uma forma **escalonada** de uma matriz quando:

- (i) todas as linhas não-nulas estão acima de qualquer linha nula;
- (ii) o líder de cada linha está numa coluna à direita do líder da linha acima;
- (iii) todos os elementos abaixo de um líder numa coluna são nulos.

Daí, quando cada linha não-nula possui como líder o número 1 e se este líder é o único elemento não-nulo em sua coluna, dizemos que a matriz está na forma **escalonada reduzida**. Uma propriedade importante é que cada matriz é equivalente a uma e somente uma matriz escalonada reduzida. No exemplo da seção anterior temos a matriz (4.11) na forma escalonada e a matriz (4.13) na forma escalonada reduzida. Aqui, apresentamos esquematicamente alguns exemplos de matrizes escalonadas, onde os símbolos \* representam qualquer número real e os elementos líderes • são os reais diferente de zero,

$$(4.14) \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & * \end{bmatrix}.$$

Analogamente, apresentamos esquematicamente alguns exemplos de matrizes escalonadas reduzidas,

$$(4.15) \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

Encontramos uma **posição de pivô** numa matriz  $A$ , num local correspondente à existência de um elemento líder numa matriz escalonada de  $A$ . Então, dizemos que a coluna desta matriz  $A$ , que contém uma posição de pivô é uma **coluna pivô**.

Por fim, chegamos à **eliminação gaussiana**, que é o procedimento utilizado na matriz completa (4.9) do exemplo da seção anterior, onde reduzimos esta matriz à forma

escalonada (4.12), suficientemente simples para nos ajudar a encontrar a solução do sistema linear correspondente. Ao procedimento total, até à forma escalonada reduzida (4.13), chamamos de **eliminação de Gaus-Jordan**. Apresentamos a seguir um novo exemplo, destacando em cada passo as operações elementares.

$$(4.16) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se fazemos  $(1/2L2)$  em seguida  $(L2 \leftrightarrow L1)$ ,

$$(4.17) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quando fazemos  $(-1/2L2)$  e  $(-2L1 + L3)$ ,

$$(4.18) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}.$$

Tomamos agora  $(-5L2 + L3)$ ,

$$(4.19) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, se fazemos  $(2L3)$ , chegamos à forma escalonada da matriz inicial, isto é,

$$(4.20) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Deixamos como exercício as operações para obtenção da forma escalonada reduzida,

$$(4.21) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$



# Bibliografia

- [1] Anton Rorres **Álgebra Linear com Aplicações** Bookman, 8<sup>a</sup> Edição - Reimpressão 2008, Porto Alegre 2001.
- [2] Boldrini/ Costa/ Figueiredo/ Wetzler **Álgebra Linear** Harbra, 3<sup>a</sup> Edição, São Paulo 1980.
- [3] David C. Lay **Álgebra Linear e suas Aplicações** LTC, 2<sup>a</sup> Edição, Rio de Janeiro 2007.

## Sugestão de exercícios do Anton

### **Páginas 46 e 47:**

1, 2, 3, 4, 5, 6

### **Página 81:**

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17,  
18, 19

### **Páginas 84 e 85:**

1, 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14

### **Páginas 89 e 90**

1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

### **Página 54**

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

### **Páginas 59 e 60**

1, 2, 3, 4, 8, 9

### **Páginas 95, 96 e 97:**

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16,  
17, 18, 19, 20, 21, 22

### **Páginas 89 e 90:**

4, 5, 12, 13

### **Páginas 30 e 31:**

1, 3, 4, 5

### **Páginas 37 e 38**

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

### **Página 47**

13, 14

### **Página 96**

24