



## 1º Avaliação – Álgebra Linear (ECT1201) – 2010.1

①(2,0 pontos) Encontre a solução do sistema usando eliminação Gaussiana.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

### RESPOSTA

$$AX=B$$

Matriz dos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz dos termos independentes

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Obtendo a matriz aumentada:

$$Aa = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \end{array} \right]$$

Aplicando as operações:

$$L2=L2-L1 \quad Aa \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

$$L1=L1-L2 \quad Aa \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

Voltando para o sistema tem-se:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -2 \\ x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} x_1 = -2 + x_3 \\ x_2 = 6 - 2x_3 \end{cases}$$

Fazendo  $x_3=s$  tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\*O sistema apresenta infinitas soluções

\* Ou:  $X_3$  é uma variável livre, Para cada  $X_3$  escolhido podemos achar um  $X_1$  e um  $X_2$ . Assim o sistema possui infinitas soluções.



②(2,8 pontos - 0,7 para cada subitem) Quais das afirmações seguintes são verdadeiras e quais são falsas (justifique brevemente).

a) Seja  $s1 = \{(x, 0, y); x, y \in R\}$ ,  $s2 = \{(x, y, 0); x, y \in R\}$ , então  $S = s1 \cap s2$  não é um espaço vetorial.

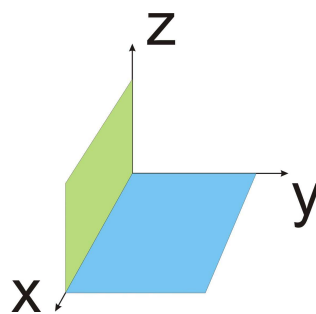
b) dado A uma matriz de ordem 4x4 e a seguinte equação matricial  $AX=0$ . Se  $\det(A)=0$ , então a única solução da equação anterior é a solução trivial  $X= (0, 0, 0,0)$

c) Se  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\} \in V$  e são linearmente independentes então  $\dim(V) \geq 4$

d) “P” é um espaço vetorial formado por todos os polinômios reais da forma  $P = \{b_1 x + b_2 x^2; b_1, b_2 \in R\}$  e  $p1 = \{a_1 x + a_2 x^2; a_1, a_2 \in R\}$ ,  $p2 = \{c_1 x + c_2 x^2; c_1, c_2 \in R\}$  são dois “vetores” do espaço vetorial P. Sendo o produto interno no espaço P definido como  $(p1, p2) = a_1 c_1 + a_2 c_2$ , o módulo (ou norma) do “vetor”  $Q=3x-4x^2$  é 5.

## RESPOSTA

a) **FALSO** : Tendo em vista que o espaço gerado por S1 seja o plano XZ (verde) e que o espaço gerado por S2 seja o plano XY (azul) e que ambos são espaços vetoriais, tem-se que a interseção entre S1 e S2 é a reta  $(x,0,0)$ .



A reta  $(x,0,0)$  é um subespaço de S1 e um subespaço de S2 pois é um espaço vetorial.

obedece aos seguintes requisitos:

i) Adição:  $(x_1,0,0)+(x_1,0,0)=(x_1+x_2,0,0) \in (x,0,0)$

ii) Multiplicação por escalar:  $k(x_1,0,0)=(k.x_1,0,0) \in (x,0,0)$

iii) Contém o elemento nulo:  $(0,0,0)$

Logo, é um espaço vetorial.



**b) FALSO:** Como o determinante da matriz  $A$  é igual a zero, isso quer dizer que as linhas (ou colunas) de  $A$  são Linearmente Dependentes, o que reduz, ao menos, uma equação do sistema. Como o sistema é homogêneo (sempre existe a solução trivial, impossibilitando do sistema ser impossível) então o sistema apresentaria infinitas soluções uma vez que existiriam mais equações que incógnitas.

**c) VERDADEIRO:** Se o conjunto  $u$  é Linearmente Independente, então a dimensão do espaço não pode ser inferior a 4 (de acordo com o teorema que diz que se  $u$ , de dimensão  $r$ , é um conjunto do  $\mathfrak{R}^n$ , então se  $r > n$  o conjunto é Linearmente Dependente). Por outro lado, o conjunto  $u$ , sendo Linearmente Independente, pode pertencer a um espaço de dimensão maior que 4. Por exemplo, pode existir no  $\mathfrak{R}^5$  quatro vetores Linearmente independentes.

**d) VERDADEIRO:** A norma de  $P$  é calculada como sendo:

$$\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$$

onde

$$\langle P, P \rangle = b_1 \cdot b_1 + b_2 \cdot b_2$$

$$\langle P, P \rangle = 3^2 + (-4)^2 = 25$$

Logo,

$$\|P\| = \sqrt{25} = 5$$





Aplicando as operações:

$$L3=L3+L2 \quad [C | I] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$L3=L3/2 \quad [C | I] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{array} \right]$$

$$L2=L2-L3 \quad [C | I] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{array} \right]$$

Logo,  $[C | I] \sim [I | C^{-1}]$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$d) \det((2A^T)^{-1}) = \frac{1}{\det(2A^T)} = \frac{1}{\det(2A)} = \frac{1}{2^3 \det(A)} = \frac{1}{8 \cdot 2} = \frac{1}{16}$$



④(2,7 pontos – cada subitem vale 0,9) Dado o conjunto de  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , onde  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  é o espaço vetorial constituído por todas as matrizes reais de ordem  $2 \times 2$ . Sendo  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ , Responda:

- a) Mostre que B é uma base de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .
- b) Qual é a dimensão de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ?
- c) Seja  $v = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 16 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , encontre as “coordenadas” de  $v$  na base B.

## RESPOSTA

a) Para que um conjunto de vetores seja uma base é necessário que o conjunto seja Linearmente independente e que gere o espaço.

Verificando se são LI:  $a.v_1 + b.v_2 + c.v_3 + d.v_4 = 0$

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2c = 0 \\ 4d = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Como a única solução possível é } a=b=c=d=0 \\ \text{então o conjunto é Linearmente Independente.} \end{array}$$

Verificando se gera o espaço:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = 2b \\ z = 4d \\ w = b \end{cases} \quad \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y}{2} \\ d = \frac{z}{4} \\ b = w \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Como } x, y, z \text{ e } w \text{ podem assumir qualquer valor que} \\ \text{sempre haverá uma combinação possível para } a, b, c \text{ e } d, \\ \text{Então o conjunto gera o espaço.} \end{array}$$

\*Como foram satisfeitas as duas condições, então o conjunto é base do espaço  $M_{2 \times 2}$ .



b) A dimensão do espaço  $M_{2 \times 2}$  é 4 pois 4 é quantidade de elementos da base, logo a dimensão do espaço (todas as bases apresentam a mesma dimensão).

$$c) \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 16 & 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 = a \\ 8 = 2c & c = 4 \\ 16 = 4d & d = 4 \\ 2 = b \end{cases}$$

Coordenadas de  $v$  na base citada são :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

\* ou (3,2,4,4)