UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

2º Avaliação – Álgebra Linear (ECT1201) – 2010.1

Aluno: ____ Turma:____________

Assinatura: ____ Data: 17 / 04 / 2010

①**(2,4 pontos –cada subitem vale 1,2)** Dada a transformação linear $T : \Re^2 \rightarrow \Re^2$:

$$T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$$

a) A transformação admite inversa? Em caso afirmativo encontre T^{-1}.

b) Encontre a dimensão do núcleo e da imagem de T.

**Considere as bases canônicas do $\Re^2$.*

RESPOSTA:

a) Representando a transformação na forma matricial:

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Para a transformação admitir inversa a matriz A deve admitir inversa, ou seja, **det(A)≠0**

$$\det\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1/2 + 1/2 = 1$$

Como det(A) ≠0, então A admite inversa, logo T admite inversa.

Calculando a inversa de T.

$$T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$$

Calculando a inversa de A:

Como A é uma matriz ortogonal (colunas de A são ortonormais)

$$\left\{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\right\}$$

A inversa é igual a transposta

$$A^T = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$T^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

ou

$$T^{-1}(x,y) = \left(1/\sqrt{2}\,x + 1/\sqrt{2}\,y, -1/\sqrt{2}\,x + 1/\sqrt{2}\,y\right)\mathbf{x}$$

b)
Núcleo de T

$$T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$$

$$T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0$$

$$N(T) = \{(0,0)\}$$

Então **dim(*N(T)*) = 0**

Para encontrar dim(Im(T)) basta usar o teorema que diz:

dim(espaço domínio) = dim(*N(T)*) + dim(Im(T))

Como dim(espaço) = 2

dim(*N(T)*) = 0

Logo, **dim(Im(T)) = 2**

Comprovando: (*não é necessário fazer na prova*)

$$T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y) = (a,b)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Como os vetores $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

são Linearmente Independentes, então a imagem de T é o espaço gerado pela base formada por esses dois vetores, ou seja, todo o $\Re^2$. Portanto, dim(Im(T)) = 2.

②**(2,2 pontos)** Uma transformação linear T:$\Re^2 \rightarrow \Re^2$ é obtida a partir da rotação de um vetor de um ângulo de -90º, seguida de uma expansão por um fator k = 2,5, seguida de reflexões em torno do eixo X e Y , exatamente nessa sequência. Qual a transformação linear resultante?

**Considere o sentido positivo como sendo o sentido anti-horário.*

RESPOSTA

a) Sequência de transformações:

Rotação de um ângulo de -90º: $T_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos(-90^o) & -sen(-90^o) \\ sen(-90^o) & \cos(-90^o) \end{bmatrix}\mathbf{x}$

Expansão por um fator K= 2,5: $T_2(\mathbf{x}) = 2{,}5\mathbf{x}$

Reflexão em torno do eixo X: $T_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

Reflexão em torno do eixo Y: $T_4(\mathbf{x}) = A_4\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

Transformação resultante:

T(**x**)=$T_4(T_3(T_2(T_1(\mathbf{x}))))$

ou

T(**x**)=A**x,** onde

$$A = A_4 A_3 K A_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} 2{,}5 \begin{bmatrix} \cos(-90^o) & -sen(-90^o) \\ sen(-90^o) & \cos(-90^o) \end{bmatrix}$$

$$A = 2{,}5\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(-90^o) & -sen(-90^o) \\ sen(-90^o) & \cos(-90^o) \end{bmatrix}$$

$$A = 2{,}5\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = 2{,}5\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2{,}5 \\ 2{,}5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -2{,}5 \\ 2{,}5 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Ou

$$T(x, y) = (-2.5y, 2.5x)$$

③**(2,6 pontos – cada subitem vale 1,3)** Considere a matriz M e responda.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) M é diagonalizável? Justifique.
b) M é diagonalizável ortogonalmente? Justifique.

RESPOSTA

a) Para saber se uma matriz é diagonalizável é necessário conhecer os autovetores.

Autovalores de M:

$$\det(\lambda I - M) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)^3 - (\lambda-1) = 0$$
$$(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 - 1\right] = 0$$
$$(\lambda-1)\left[\lambda^2 - 2\lambda\right] = 0$$
$$(\lambda-1)\lambda(\lambda-2) = 0$$
$$\lambda = 1 \quad \lambda = 0 \quad \lambda = 2$$

Autovetores de M: $(\lambda I - M)v = 0$

λ=1

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_2 - 2v_3 = 0 \\ -v_1 = 0 \end{cases} \qquad v = v_2\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ=0 $\quad (\lambda I - M)u = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -u_1 - u_2 - 2u_3 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \\ -u_3 = 0 \end{cases} \qquad u = u_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

λ=2 $\quad (\lambda I - M)w = 0$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} w_1 - w_2 - 2w_3 = 0 \\ -w_1 + w_2 = 0 \\ w_3 = 0 \end{cases} \qquad w = w_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então os autovetores são:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Como são Linearmente independentes, então a matriz M é diagonalizável.

b) A matriz M não é diagonalizável ortogonalmente, pois não é uma matriz simétrica e apenas as matrizes simétricas são ortogonalmente diagonalizáveis.

Ou então:

Como os autovetores de M não são ortogonais, então M não é diagonalizável ortogonalmente.

④**(2,8 pontos – cada subitem vale 0,7)** Considere a equação quadrática:

$$Q(z_1, z_2) = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_1 - 12z_2 = 23$$

a) Identifique as coordenadas do centro desta cônica em relação ao sistema de coordenadas Z_1,Z_2.
b) Identifique a relação entre um sistema de coordenadas Y_1,Y_2, onde a cônica aparece centrada na origem, e o sistema Z_1,Z_2.
c) Considerando que a equação no sistema Y_1,Y_2 tem a forma geral $\mathbf{Y}^T B \mathbf{Y}$, Identifique os autovalores associados a matriz B .
d) Caso fosse adicionada à quádrica o termo z1z2, o que aconteceria com o gráfico? Apenas explique.

RESPOSTA

a) Para encontrar o centro da cônica é necessário encontrar o novo sistema de coordenadas.

$$Q(z_1, z_2) = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_1 - 12z_2 = 23$$

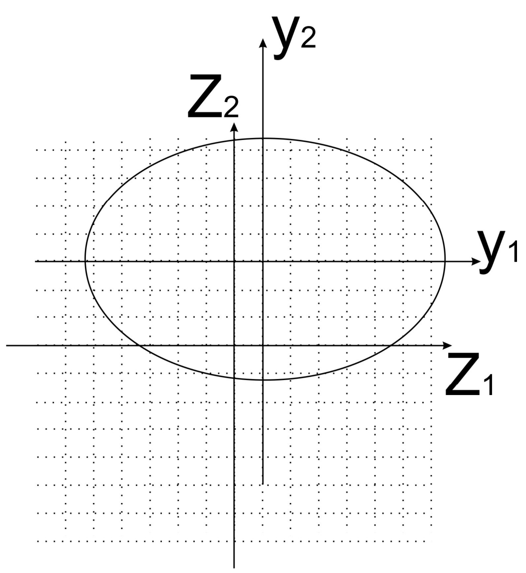
Agrupando os termos semelhantes:

$$\left(z_1^2 - 2z_1\right) + \left(2z_2^2 - 12z_2\right) = 23$$
$$\left(z_1^2 - 2z_1\right) + 2\left(z_2^2 - 6z_2\right) = 23$$

Somando os termos necessários:

$$\left(z_1^2 - 2z_1 + 1 - 1\right) + 2\left(z_2^2 - 6z_2 + 9 - 9\right) = 23$$
$$\left(z_1^2 - 2z_1 + 1\right) - 1 + 2\left(z_2^2 - 6z_2 + 9\right) - 18 = 23$$
$$(z_1 - 1)^2 + 2(z_2 - 3)^2 = 42$$

O centro da cônica em relação ao sistema Z_1Z_2 é o ponto (1,3) – fatores de deslocamento em z1 e z2 respectivamente.



b) Fazendo $y_1 = z_1 - 1$ e $y_2 = z_2 - 3$

$$y_1^2 + 2y_2^2 = 42$$

Colocando na forma padrão da elipse

$$\frac{y_1^2}{42} + \frac{2y_2^2}{42} = \frac{42}{42}$$

$$\frac{y_1^2}{42} + \frac{y_2^2}{21} = 1$$

$a = \sqrt{42} \cong 6{,}4 \qquad b = \sqrt{21} \cong 4{,}5$

c) A quádrica referenciada no sistema y_1y_2 é escrita na forma

$$y_1^2 + 2y_2^2 = 42$$

Na forma matricial: $\mathbf{Y}^T B \mathbf{Y}$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 42$$

Onde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Então os autovalores de B são 1 e 2.

Ou então é o mesmo que encontrar os autovalores da matriz A:

$$Q(z_1, z_2) = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_1 - 12z_2 = 23$$

$$Q(z_1, z_2) = z^T Az + Cz = 23$$

$$Q(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 23$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Autovalores de A: 1 e 2.

d) Caso o termo cruzado (produto misto) aparecesse na forma quádrica, a cônica seria também rotacionada.