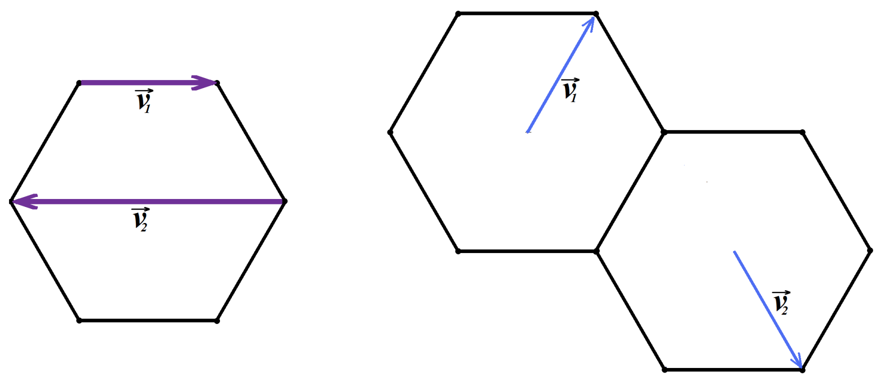
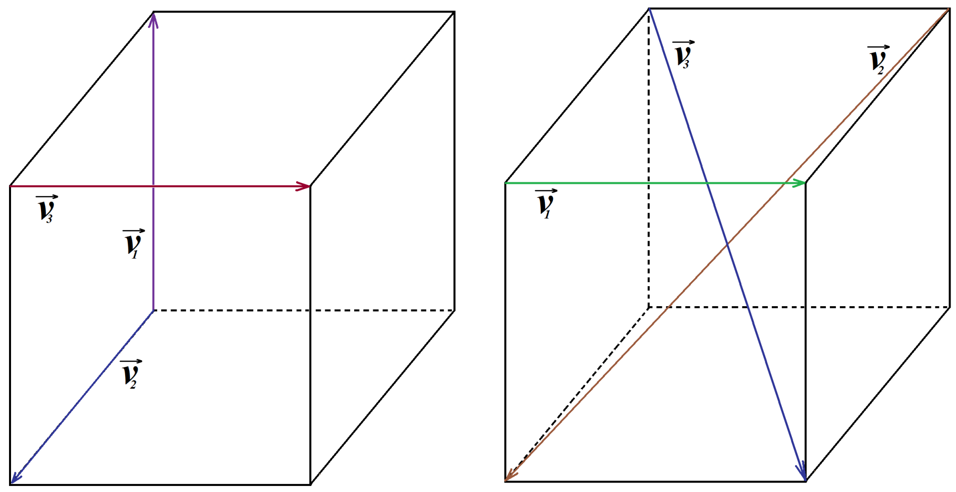
Dependência linear - Bases - Mudança de bases

1. Classifique o conjunto dos vetores (coloridos) em cada figura em LI ou LD.

Considere os vetores em cada hexágono separadamente.



Considere os vetores em cada cubo separadamente.



2. Dados os vetores no plano $\vec{v} = (1, -2)$, $\vec{w} = (1, 1)$ e $\vec{u}(-3, 0)$, classifique (justificando), o conjunto de vetores abaixo em LI ou LD:

   (a) $\{\vec{v} + \vec{w} + \vec{u}\}$
   (b) $\{\vec{v} + 2\vec{w} + \vec{u}\}$
   (c) $\{2\vec{v} + \vec{w}, \vec{u}\}$
   (d) $\{\vec{v}, \vec{w} + \vec{u}\}$
   (e) $\left\{2\vec{v} + 4\vec{w}, \frac{1}{3}\vec{u}\right\}$
   (f) $\left\{2\vec{v}, 4\vec{w}, \frac{1}{3}\vec{u}\right\}$

3. Dados os vetores no plano $\vec{v} = (1, -2, 0)$, $\vec{w} = (2, 1, -1), \vec{u}(-3, 0, -1)$ e $\vec{t}(4, 8, -1)$, classifique (justificando), o conjunto de vetores abaixo em LI ou LD:

   (a) $\{\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} + \vec{t}\}$
   (b) $\{3\vec{v} - 2\vec{w} + \vec{u} + \vec{t}\}$
   (c) $\{-3\vec{v} + 2\vec{w}, -\vec{u} - \vec{t}\}$
   (d) $\{\vec{v}, \vec{w} + \vec{u}\}$
   (e) $\left\{2\vec{v}, 4\vec{w}, \frac{1}{3}\vec{u}\right\}$
   (f) $\left\{-3\vec{v} + 2\vec{w}, \frac{1}{3}\vec{u}, \vec{t}\right\}$
   (g) $\left\{-3\vec{v}, 2\vec{w}, \frac{1}{3}\vec{u}, \vec{t}\right\}$

4. Sendo $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (2, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1)$

   (a) Escreva, se possível, $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{v}$.
   (b) Escreva, se possível, $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
   (c) Escreva, se possível, $\vec{t}$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

5. Sendo $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$

   (a) Escreva, se possível, $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
   (b) Escreva, se possível, $\vec{t}$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

6. $\vec{v} = (1, -1)$ pode ser expresso como combinação linear de $\vec{w} = (-1, 1)$ e $\vec{u} = \left(2, \frac{1}{3}\right)$?

7. $\vec{v} = (1, -1, 3)$ pode ser expresso como combinação linear de $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{u} = \left(2, 3, \frac{1}{3}\right)$?

8. Ache m número real de modo que $\vec{u} = (1, 2, 2)$ seja combinação linear de $\vec{v} = (m - 1, 1, m - 2)$ e $\vec{w} = (m + 1, m - 1, 2)$. Em seguida, determine m para que $\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right)$ seja LI.

9. Decida se são LI ou LD:

   (a) $\{\vec{v} = (1, 0), \vec{w} = (2, 0)\}$
   (b) $\{\vec{v} = (1, 0), \vec{w} = (0, 0)\}$
   (c) $\{\vec{v} = (1, 0), \vec{w} = (2, 0)\}$
   (d) $\{\vec{v} = (4, 8), \vec{w} = (2, -4)\}$
   (e) $\{\vec{v} = (4, -2), \vec{w} = (2, -1)\}$
   (f) $\{\vec{v} = (1, 0), \vec{w} = (200, 2), \vec{w} = (300, 1)\}$
   (g) $\{\vec{v} = (1, 2), \vec{w} = (1, -7), \vec{w} = (-5, 4)\}$
   (h) $\{\vec{v} = (0, 0)\}$
   (i) $\{\vec{v} = (0, 1)\}$

10. Decida se são LI ou LD:

(a) $\{\vec{v} = (1,0,0), \vec{w} = (2,0,-1)\}$
(b) $\{\vec{v} = (1,0,0), \vec{w} = (0,0,-1)\}$
(c) $\{\vec{v} = (1,0,0), \vec{w} = (2,0,0)\}$
(d) $\{\vec{v} = (4,-2,8), \vec{w} = (2,-1,-4)\}$
(e) $\{\vec{v} = (4,-2,8), \vec{w} = (2,-1,4)\}$
(f) $\{\vec{v} = (1,0,0), \vec{w} = (200,2,1), \vec{w} = (300,1,2)\}$
(g) $\{\vec{v} = (1,2,1), \vec{w} = (1,-1,-7), \vec{w} = (-4,-5,4)\}$
(h) $\{\vec{v} = (0,0,0)\}$
(i) $\{\vec{v} = (0,1,0)\}$

11. Sendo $V = \big(\vec{v}_1, -2\vec{v}_2\big)$ base do plano e $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{f}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \end{cases}$. Responda:

(a) Decida se $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ é base do espaço.
(b) Se V é base ortonormal, verifiquue se F é base ortonormal.

12. Sendo $V = \big(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\big)$ base do espaço e $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{f} = 3\vec{v}_3 \end{cases}$. Responda:

(a) Decida se $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ é base do espaço.
(b) Se V é base ortonormal, verifiquue se F é base ortonormal.

13. Ache o número real m para que os conjuntos abaixo sejam LD.

(a) $\{\vec{v} = (m,1), \vec{w} = (1,m)\}$
(b) $\{\vec{v} = (1-m^2, 1-m), \vec{w} = (m,m)\}$
(c) $\{\vec{v} = (m,1), \vec{w} = (1,2), \vec{u} = (1,1)\}$
(d) $\{\vec{v} = (m,1), \vec{w} = (0,1), \vec{u} = (0,m)\}$

14. Ache o número real m para que os conjuntos abaixo sejam LD.

(a) $\{\vec{v} = (m,1,m), \vec{w} = (1,m,1)\}$
(b) $\{\vec{v} = (1-m^2, 1-m, 0), \vec{w} = (m,m,m)\}$
(c) $\{\vec{v} = (m,1,m+1), \vec{w} = (1,2,m), \vec{u} = (1,1,1)\}$
(d) $\{\vec{v} = (m,1,m+1), \vec{w} = (0,1,m), \vec{u} = (0,m,2m)\}$

15. Seja $E = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_2\big)$ e $\begin{cases} \vec{f}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \end{cases}$. Responda:

(a) Verifique se $F = \big(\vec{f}_1, \vec{f}_2\big)$ é base do plano.
(b) Determine a matriz mudança de base de E para F.
(c) Determine a matriz mudança de base de F para E.
(d) Sendo $\vec{v} = -4\vec{f}_1 + \vec{f}_2$. Escreva $\vec{v}$ em função de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.
(e) Sendo $\vec{v} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Escreva $\vec{v}$ em função de $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$.

16. Seja $E = \big(\vec{e}_1, \vec{e}_2\big)$ e $\begin{cases} \vec{f}_1 = -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = -2\vec{e}_2 \end{cases}$. Responda:

(a) Verifique se $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right)$ é base do plano.

(b) Determine a matriz mudança de base de E para F.

(c) Determine a matriz mudança de base de F para E.

(d) Sendo $\vec{v} = \vec{f}_1 - \vec{f}_2$. Escreva $\vec{v}$ em função de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.

(e) Sendo $\vec{v} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Escreva $\vec{v}$ em função de $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$.

17. Seja $E = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ e $\begin{cases} \vec{f}_1 = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 \end{cases}$. Responda:

    (a) Verifique se $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ é base do espaço.

    (b) Determine a matriz mudança de base de E para F.

    (c) Determine a matriz mudança de base de F para E.

    (d) Sendo $\vec{v} = -4\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3$. Escreva $\vec{v}$ em função de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$.

    (e) Sendo $\vec{v} = -4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Escreva $\vec{v}$ em função de $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$.

18. Seja $E = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ e $\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 \\ \vec{f}_3 = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \end{cases}$. Responda:

    (a) Verifique se $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ é base do espaço.

    (b) Determine a matriz mudança de base de E para F.

    (c) Determine a matriz mudança de base de F para E.

    (d) Sendo $\vec{v} = (4, 2, -1)_F$. Escreva $\vec{v}$ na base E.

    (e) Sendo $\vec{v} = (-4, 1, -1)_E$. Escreva $\vec{v}$ na base F.

19. Sejam $E = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$, $F = \left(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right)$ e $G = \left(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\right)$ bases do espaço com:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{f}_1 - \frac{3}{2}\vec{f}_3 \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{f}_1 + \frac{1}{3}\vec{f}_3 \\ \vec{e}_3 = \vec{f}_2 \end{cases} \quad textrm\ e \quad \begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{g}_3 = \vec{e}_1 \end{cases}$$

    (a) Determine as matrizes mudanças de base $M_{EF}, M_{FE}, M_{EG}, M_{GE}, M_{FG}$ e M_{GF}.

    (b) Determine $\vec{v} = \vec{f}_1 - 4\vec{f}_2$. Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ nas bases E, F e G.

    (c) Determine $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ nas bases E, F e G.

    (d) Determine $\vec{v} = \vec{g}_3$. Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ nas bases E, F e G.

    (e) Determine $\vec{v} = \vec{f}_1 - 4\vec{g}_2 - 3\vec{e}_1$. Calcule as coordenadas de $\vec{v}$ nas bases E, F e G.

20. Ache $\vec{v}$ tal que $|\,\vec{v}\,| = \sqrt{5}$, ortogonal a $(2, 1)$, tal que $\left\{\vec{v}, (1, 1)\right\}$ seja LD.

21. Ache $\vec{v}$ tal que $|\,\vec{v}\,| = \sqrt{5}$, ortogonal a $(2, 1, -1)$, tal que $\left\{\vec{v}, (1, 1, 1), (0, 1, -1)\right\}$ seja LD.

22. Decomponha $\vec{w}$ como soma de dois vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, tais que $\left\{\, \vec{w}_1\, ,\, (1, 1, 1)\, ,\, (-1, 1, 2)\, \right\}$ é LD e $\vec{w}_2$ é ortogonal a $(1, 1, 1)$ e a $(-1, 1, 2)$.

23. Ache $\vec{v}$ de norma $3\sqrt{3}$, sabendo que $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w} = (2, 3)$ e a $\vec{u} = (2, -4)$. Qual o ângulo que o vetor encontardo forma com o vetor $(1, 0)$?

24. Dados $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, 2)$, determine:

    (a) Um vetor na direção da altura h_A , altura relativa ao vértice A do triângulo ABC.

(b) Um vetor na direção da bissetriz b_A, bissetriz relativa ao vértice A.

(c) Um vetor na direção da mediana m_A, mediana relativa ao vértice A.

(d) Dados $\vec{v} = (1,1,1)$ e $\vec{w} = (0,-1,-2)$, ache uma base ortonormal positiva $\left(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\right)$ tal que:

(i) $\vec{f_1} \parallel \vec{v}$ e $\vec{v}$ com mesmo sentido que $\vec{f_1}$

(ii) $\vec{f_2}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e a $\vec{w}$, e tem a primeira coordenada positiva.

25. Calcule $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$ sabendo que $|\vec{v}| = 2$, $|\vec{w}| = 3$ e $|\vec{u}| = 4$ e que $\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right)$ é uma base ortogonal negativa.

26. Sabendo que $\text{ang}\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = 30°$, $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, $|\vec{v}| = 1$, $|\vec{w}| = 1$ e $|\vec{u}| = 4$ e $\left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right)$ é base positiva. Determine $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$.

27. Prove que se $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$ e $\vec{w} \neq \vec{0}$ então existe $a \in \mathbf{R}$ tal que $\vec{v} = a\vec{w}$

28. Prove que se $\left\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right\}$ é LI, então $\left\{\vec{v} + \vec{w} + \vec{u}, \vec{v} - \vec{w}, 3\vec{u}\right\}$ também é LI.

29. Prove que se $\left\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right\}$ é LI, então $\left\{\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{u}, \vec{w} + \vec{u}\right\}$ também é LI.

30. Prove que $\left\{\vec{v}, \vec{w}\right\}$ é LI se, e somente se $\left\{\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}\right\}$

31. Prove que $\left\{\vec{v} - 2\vec{w} + \vec{u}, 2\vec{v} + \vec{w} + 3\vec{u}, \vec{v} + 8\vec{w} + 3\vec{u}\right\}$ é LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{u}$.