Slides divulgados antes da aula. No dia da aula pode haver modificações. Os slides definitivos serão colocados na página no dia 12/08/2009.

Bases, produto escalar e projeção ortogonal

Deilson de Melo Tavares
Escola de Ciências e Tecnologia

Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, então

1. $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ é um vetor unitário na direção e no sentido de $\mathbf{v}$;

2. a equação $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ expressa $\mathbf{v}$ em termos do seu comprimento e direção.

slide 2

EXEMPLO 7 Um vetor força

Uma força de 6 N (newtons) é aplicada na direção do vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Expresse a força $\mathbf{F}$ como produto de sua magnitude e direção.

SOLUÇÃO O vetor força tem magnitude 6 e direção $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, portanto

$$\mathbf{F} = 6\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 6\frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6\frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3}$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right)$$

slide 3

O **ponto médio** M do segmento de reta que liga os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é o ponto

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

slide 4

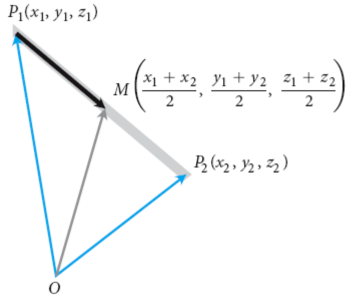

FIGURA 12.17 As coordenadas do ponto médio são as médias das coordenadas de P_1 e P_2.

slide 5

EXEMPLO 8 Encontrando pontos médios

O ponto médio do segmento que liga $P_1(3, -2, 0)$ e $P_2(7, 4, 4)$ é

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (5, 1, 2)$$

slide 6

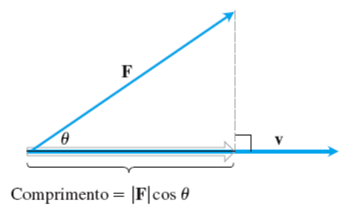

FIGURA 12.18 A magnitude de força $\mathbf{F}$ na direção do vetor $\mathbf{v}$ é o comprimento $|\mathbf{F}| \cos \theta$ da projeção de $\mathbf{F}$ em $\mathbf{v}$.

slide 7

Teorema 1 Ângulo entre dois vetores

O ângulo θ entre dois vetores não-nulos $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ é dado por

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

slide 8

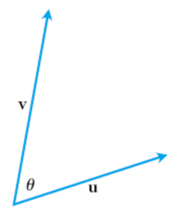

FIGURA 12.19 O ângulo entre **u** e **v**.

slide 9

Definição Produto escalar

O **produto escalar** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ("**u** escalar **v**") dos vetores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ é o número

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

slide 10

EXEMPLO 1 Encontrando produtos escalares

(a) $\langle 1, -2, -1 \rangle \cdot \langle -6, 2, -3 \rangle = (1)(-6) + (-2)(2) + (-1)(-3)$
$= -6 - 4 + 3 = -7$

(b) $\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \cdot (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2}\right)(4) + (3)(-1) + (1)(2) = 1$

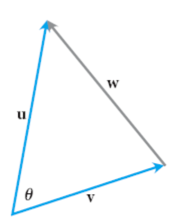

FIGURA 12.20 A lei do paralelogramo de adição de vetores dá $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

EXEMPLO 2 Encontrando o ângulo entre dois vetores no espaço

Encontre o ângulo entre $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO Usamos a fórmula dada anteriormente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right) \approx 1{,}76 \text{ radianos} \end{aligned}$$

slide 13

EXEMPLO 3 Encontrando um ângulo de um triângulo

Encontre o ângulo θ no triângulo ABC determinado pelos vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 5)$ e $C = (5, 2)$ (Figura 12.21).

SOLUÇÃO O ângulo θ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. As formas componentes desses dois vetores são

$$\overrightarrow{CA} = \langle -5, -2 \rangle \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CB} = \langle -2, 3 \rangle$$

Primeiro calculamos o produto escalar e a magnitude desses dois vetores.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (-5)(-2) + (-2)(3) = 4 \\ |\overrightarrow{CA}| &= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \\ |\overrightarrow{CB}| &= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Então, aplicando a fórmula do ângulo, temos

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{4}{\left(\sqrt{29}\right)\left(\sqrt{13}\right)}\right) \\ &\approx 78{,}1^\circ \quad \text{ou} \quad 1{,}36 \text{ radianos} \end{aligned}$$

slide 14

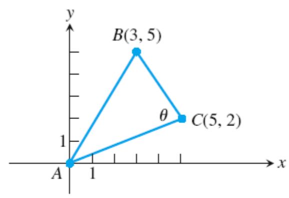

FIGURA 12.21 O triângulo do Exemplo 3.

Definição Vetores ortogonais

Os vetores **u** e **v** são **ortogonais** (**perpendiculares**) se e somente se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

EXEMPLO 4 Aplicando a definição de ortogonalidade

(a) $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$ são ortogonais porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(4) + (-2)(6) = 0$.

(b) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ é ortogonal a $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(0) + (-2)(2) + (1)(4) = 0$.

(c) $\mathbf{0}$ é ortogonal a todo vetor $\mathbf{u}$, uma vez que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} &= \langle 0, 0, 0 \rangle \cdot \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\ &= (0)(u_1) + (0)(u_2) + (0)(u_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Propriedades do produto escalar

Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem quaisquer vetores e c for um escalar, então

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
3. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$

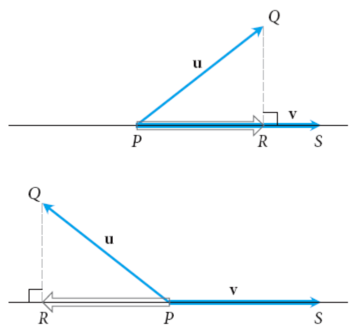

FIGURA 12.22 A projeção ortogonal de **u** em **v**.

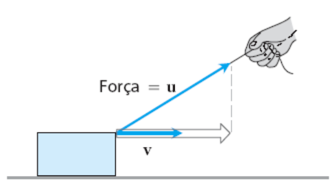

FIGURA 12.23 Se puxamos uma caixa com uma força **u**, a força efetiva que move a caixa para a frente na direção **v** é a projeção de **u** em **v**.

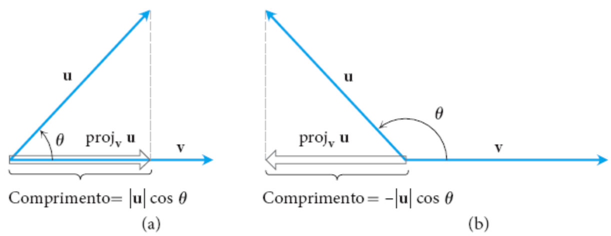

FIGURA 12.24 O comprimento de $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ é (a) $|\mathbf{u}|\cos\theta$ se $\cos\theta \geq 0$ e (b) $-|\mathbf{u}|\cos\theta$ se $\cos\theta < 0$.

slide 21

A projeção ortogonal de **u** em **v**:

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \qquad (1)$$

A componente escalar de **u** na direção de **v**:

$$|\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad (2)$$

slide 22

EXEMPLO 5 Encontrando projeções ortogonais

Encontre a projeção ortogonal de $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ em $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e a componente escalar de **u** na direção de **v**.

SOLUÇÃO Encontramos $\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ a partir da Equação (1):

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{6-6-4}{1+4+4}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k})\\ &= -\frac{4}{9}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}) = -\frac{4}{9}\mathbf{i}+\frac{8}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}\end{aligned}$$

Encontramos a componente escalar de **u** na direção de **v** a partir da Equação (2):

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}|\cos\theta &= \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)\\ &= 2-2-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

slide 23

EXEMPLO 6 Encontrando projeções ortogonais e componentes escalares

Encontre a projeção ortogonal de uma força $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ em $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ e a componente escalar de **F** na direção de **v**.

SOLUÇÃO A projeção ortogonal é

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{F} &= \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\\ &= \frac{5-6}{1+9}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}) = -\frac{1}{10}(\mathbf{i}-3\mathbf{j})\\ &= -\frac{1}{10}\mathbf{i}+\frac{3}{10}\mathbf{j}\end{aligned}$$

A componente escalar de **F** na direção de **v** é

$$|\mathbf{F}|\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{5-6}{\sqrt{1+9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

slide 24

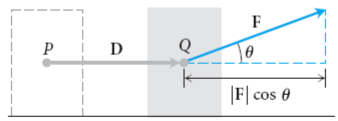

FIGURA 12.25 O trabalho realizado por uma força constante **F** durante um deslocamento **D** é $(|\mathbf{F}| \cos\theta)\,|\mathbf{D}|$.

slide 25

Definição Trabalho realizado por uma força constante

O **trabalho** realizado por uma força constante **F** que atua em um deslocamento $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ é

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}| \cos\theta$$

onde q é o ângulo entre **F** e **D**.

slide 26

EXEMPLO 7 Aplicando a definição de trabalho

Se $|\mathbf{F}|= 40$ N (newtons), $|\mathbf{D}|= 3$ m e $\theta = 60^\circ$, o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ que atua de P a Q é

$$\begin{aligned} \text{Trabalho} &= |\mathbf{F}|\,|\mathbf{D}| \cos\theta && \text{Definição} \\ &= (40)(3)\cos 60^\circ && \text{Valores dados} \\ &= (120)(1/2) \\ &= 60 \text{ J (joules)} \end{aligned}$$

slide 27

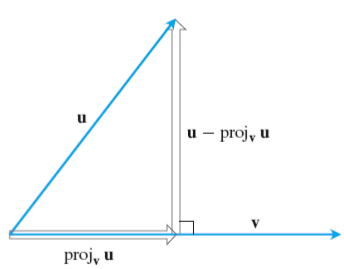

FIGURA 12.26 Escrevendo **u** como a soma de vetores paralelos e ortogonais a **v**.

slide 28

Como escrever u como um vetor paralelo a v mais um vetor ortogonal a v

$$\mathbf{u} = \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u})$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}}_{\text{Paralelo a v}} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\right)}_{\text{Ortogonal a v}}$$

EXEMPLO 8 Força sobre uma espaçonave

Uma força $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ é aplicada a uma espaçonave com velocidade vetorial $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Expresse **F** como uma soma de um vetor paralelo a **v** e um vetor ortogonal a **v**.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{F} + (\mathbf{F} - \text{proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{F}) \\
&= \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} + \left(\mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}\right) \\
&= \left(\frac{6-1}{9+1}\right)\mathbf{v} + \left(\mathbf{F} - \left(\frac{6-1}{9+1}\right)\mathbf{v}\right) \\
&= \frac{5}{10}(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \left(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k} - \frac{5}{10}(3\mathbf{i} - \mathbf{j})\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\right)
\end{aligned}$$