Slides divulgados antes da aula. No dia da aula pode haver modificações. Os slides definitivos serão colocados na página no dia 15/08/2009.

Produto vetorial e aplicações

Deilson de Melo Tavares
Escola de Ciências e Tecnologia

Definição Produto vetorial

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta)\, \mathbf{n}$$

slide 2

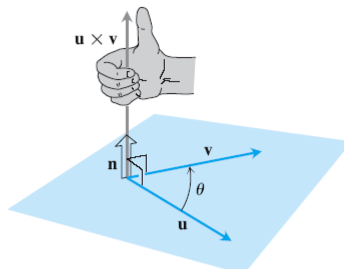

FIGURA 12.27 A construção de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Vetores paralelos

Vetores não-nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos se e somente se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Propriedades do produto Vetorial

Se **u**, **v** e **w** forem quaisquer vetores e r e s forem escalares, então

1. $(r\mathbf{u}) \times (s\mathbf{v}) = (rs) \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
3. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$
4. $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
5. $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

slide 5

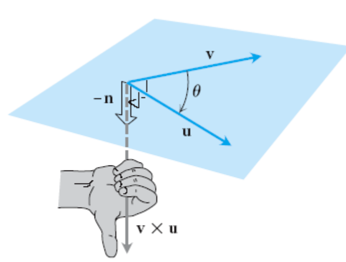

FIGURA 12.28 A construção de $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

slide 6

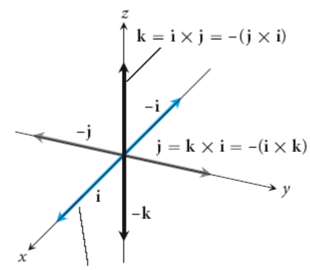

FIGURA 12.29 Os produtos vetoriais de **i**, **j** e **k** dois a dois.

slide 7

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\operatorname{sen}\theta||\mathbf{n}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta.$$

slide 8

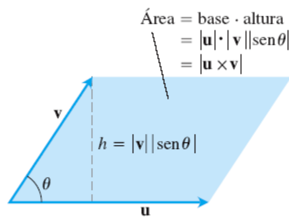

FIGURA 12.30 O paralelogram determinado por **u** e **v**.

slide 9

Calculando produtos vetoriais usando determinantes

Se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, então

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

slide 10

EXEMPLO 1 Calculando produtos vetoriais com determinantes

Encontre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ se $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

SOLUÇÃO

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$$

slide 11

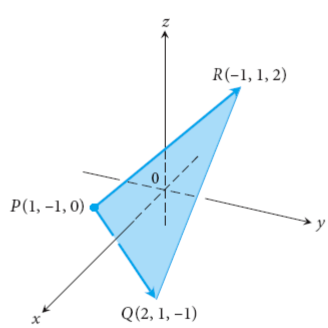

FIGURA 12.31 A área do triângulo PQR é metade de $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$ (Exemplo 2).

slide 12

EXEMPLO 2 Encontrando vetores perpendiculares a um plano

Encontre um vetor perpendicular ao plano de $P(-1,\ 1,\ 0)$, $Q(2, 1, -1)$ e $R(-1, 1, 2)$ (Figura 12.31).

SOLUÇÃO O vetor $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ é perpendicular ao plano porque é perpendicular a ambos os vetores. Em termos de componentes,

$$\overrightarrow{PQ} = (2 - 1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} + (-1 - 0)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (-1 - 1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} + (2 - 0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$$

slide 13

EXEMPLO 3 Encontrando a área de um triângulo

Encontre a área do triângulo com vértices $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ e $R(-1, 1, 2)$ (Figura 12.31).

SOLUÇÃO A área do paralelogramo determinado por P, Q e R é

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}| \qquad \text{Valores do Exemplo 2.}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}$$

A área do triângulo é metade desta, ou $3\sqrt{2}$.

slide 14

EXEMPLO 4 Encontrando um vetor unitário normal a um plano

Encontre um vetor unitário perpendicular ao plano de $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ e $R(-1, 1, 2)$.

SOLUÇÃO Como $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ é perpendicular ao plano, sua direção $\mathbf{n}$ é um vetor unitário perpendicular ao plano. Tomando valores dos exemplos 2 e 3, temos

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

slide 15

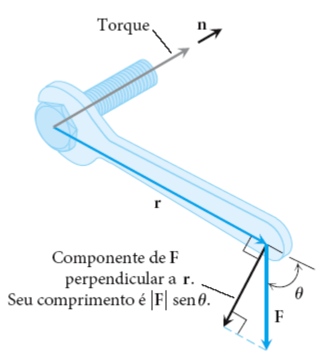

FIGURA 12.32 O vetor torque descreve a tendência da força **F** para girar o parafuso para a frente.

slide 16

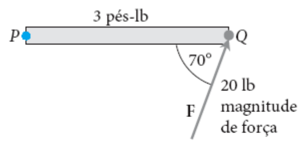

FIGURA 12.33 A norma do torque exercido por **F** em *P* é de cerca de 56,4 pés-lb (Exemplo 5).

slide 17

EXEMPLO 5 Encontrando a magnitude de um torque

A magnitude do torque gerado pela força **F** no ponto pivô *P* na Figura 12.33 é

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}| &= |\overrightarrow{PQ}|\ \mathbf{F}\ \text{sen } 70° \\ &\approx (3)(20)(0{,}94) \\ &\approx 56{,}4 \text{ pés-lb} \end{aligned}$$

slide 18

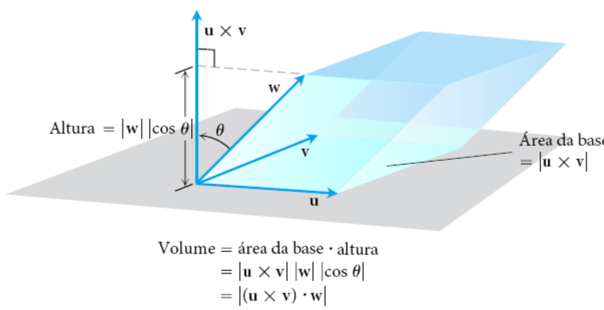

FIGURA 12.34 O número $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ é o volume de um paralelepípedo.

slide 19

Calculando o produto escalar triplo

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

slide 20

EXEMPLO 6 Encontrando o volume de um paralelepípedo

Encontre o volume da caixa (paralelepípedo) determinada por $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

SOLUÇÃO Usando uma calculadora, encontramos

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -23$$

O volume é $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = 23$ unidades cúbicas.