

Produto Escalar - Ângulos - Projeção Ortogonal

- Ache o cosseno do ângulo entre os vetores \vec{v} e \vec{w} . Preste atenção na notação que está sendo usada para vetores em cada item: parênteses (x, y) ou ângulo $\langle x, y \rangle$. Use sempre a mesma notação do item quando estiver resolvendo.
 - $\vec{v} = (2, 0)$ e $\vec{w} = (-20, 100)$
 - $\vec{v} = \langle 3, 3 \rangle$ e $\vec{w} = \langle -2, 1 \rangle$
 - $\vec{v} = \langle 2000, 0 \rangle$ e $\vec{w} = \langle 0, 100 \rangle$
 - $\vec{v} = (2, 0)$ e $\vec{w} = (-2000, 10000)$
 - $\vec{v} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ e $\vec{w} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$
- Ache o cosseno do ângulo entre os vetores \vec{v} e \vec{w} . Preste atenção na notação que está sendo usada para vetores em cada item: parênteses (x, y, z) ou ângulo $\langle x, y, z \rangle$. Use sempre a mesma notação do item quando estiver resolvendo.
 - $\vec{v} = (2, 0, 2)$ e $\vec{w} = (-20, 100, 20)$
 - $\vec{v} = \langle 3, 3, 0 \rangle$ e $\vec{w} = \langle -2, -1, 2 \rangle$
 - $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (2, 2, 2)$
 - $\vec{v} = \langle 200, 200, 0 \rangle$ e $\vec{w} = \langle -2000, 1000, 2000 \rangle$
 - $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$ e $\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3} \right)$
- Encontre as medidas dos ângulos do triângulo cujo os vértices são $A = (2, 0)$, $B = (-2, 0)$ e $C = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$.
- Encontre a medida dos ângulos entre as diagonais do retângulo cujo os vértices são $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 4)$ e $D = (4, 1)$.
- Sabendo que $\text{ang}(\vec{v}, \vec{w}) = 45^\circ$ e que $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ e também que $|\vec{w}| = 1$ ache o ângulo entre os vetores $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$. Dica: escreva a fórmula para o ângulo entre dois vetores quaisquer e depois substitua e desenvolva.
- Determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, o cosseno entre \mathbf{u} e \mathbf{v} e as projeções $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ e $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ para os seguintes conjuntos de \mathbf{u} e \mathbf{v} .
 - $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -3\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{5}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 - $\mathbf{u} = \langle 3, -1, -1 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 2, -4, 7 \rangle$
 - $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ e $\mathbf{v} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right\rangle$
 - $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 2, -\sqrt{45}, \sqrt{3} \rangle$

7. Ache as componentes escalares de \mathbf{u} em \mathbf{v} para os vetores no exercício anterior. O que significa a componente escalar? Qual a diferença entre a componente escalar e a projeção ortogonal?
8. Escreva a equação vetorial geral expressando um vetor \mathbf{u} em termos de um vetor paralelo e outro vetor perpendicular a um vetor \mathbf{v} .
9. Decomponha o vetor \mathbf{u} em um vetor paralelo a \mathbf{v} e outro vetor perpendicular a \mathbf{v} :
- (a) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
 (b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{5}\mathbf{k}$
10. Dado $\vec{v} = (0, 1)$. Decomponha $\vec{w} = (-1, 3)$ como soma de dois vetores \vec{w}_1 e \vec{w}_2 com $\vec{w}_1 \perp \vec{v}$ e $\vec{w}_2 \parallel \vec{v}$ (o símbolo \parallel significa “paralelo”).
11. Dado $\vec{v} = (0, 1, 3)$. Decomponha $\vec{w} = (-1, -3, 2)$ como soma de dois vetores \vec{w}_1 e \vec{w}_2 com $\vec{w}_1 \perp \vec{v}$ e $\vec{w}_2 \parallel \vec{v}$.
12. Quando dois vetores são ortogonais?
13. Escreva a equação vetorial geral para dois vetores ortogonais.
14. Ache x de modo que $\vec{v} \perp \vec{w}$ (o símbolo \perp significa “perpendicular” ou “ortogonal”):
- (a) $\vec{v} = (x, 3)$ e $\vec{w} = (1, -x)$
 (b) $\vec{v} = (x, x)$ e $\vec{w} = (4, x)$
 (c) $\vec{v} = (x + 1, 1)$ e $\vec{w} = (x - 1, -1)$
 (d) $\vec{v} = (x, 3)$ e $\vec{w} = (x, -x)$
15. Ache x de modo que $\vec{v} \perp \vec{w}$:
- (a) $\vec{v} = (x, 0, 3)$ e $\vec{w} = (1, x, 3)$
 (b) $\vec{v} = (x, x, 4)$ e $\vec{w} = (4, x, 1)$
 (c) $\vec{v} = (x + 1, 1, 2)$ e $\vec{w} = (x - 1, -1, -2)$
 (d) $\vec{v} = (x, -1, 4)$ e $\vec{w} = (x, -3, 1)$
16. Se \vec{u}_1 e \vec{u}_2 forem vetores unitários ortogonais e $\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ encontre $\vec{v} \cdot \vec{u}_1$ e $\vec{v} \cdot \vec{u}_2$.
17. Ache \vec{v} ortogonal a $\vec{w} = (4, -1)$ que satisfaz $\vec{v} \cdot (1, 1) = -1$.
18. Obtenha um vetor \vec{u} ortogonal a $\vec{v} = \langle 4, -1, 5 \rangle$ e a $\vec{w} = \langle 1, -2, 3 \rangle$ tal que $\vec{u} \cdot \langle 1, 1, 1 \rangle = -1$.
19. Obtenha um vetor \vec{u} ortogonal a $\vec{v} = \langle 1, 1, 0 \rangle$ tal que $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ e a medida angular entre \vec{u} e $\vec{w} = \langle 1, -1, 0 \rangle$ seja $\frac{\pi}{4}$.
20. Ache \vec{v} de norma $3\sqrt{3}$, sabendo que \vec{v} é ortogonal a $\vec{w} = (2, 3, -1)$ e a $\vec{u} = (2, -4, 6)$. Dos vetores \vec{v} encontrados, qual o que forma ângulo agudo com o vetor $(1, 0, 0)$?

21. Suponha que AB seja o diâmetro de um círculo com centro O e que C seja um ponto sobre um dos dois arcos que ligam A e B . Mostre que \overline{CA} e \overline{CB} são ortogonais.
22. Mostre que as diagonais de um losango (paralelogramo com lados de comprimento iguais) são perpendiculares.
23. Mostre que os quadrados são os únicos retângulos com diagonais perpendiculares.
24. Prove que um paralelogramo é um retângulo se e somente se suas diagonais tiverem comprimentos iguais.
25. Utilizando a relação de Pitágoras (a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa) mostre a lei dos cossenos.
26. Calcule $|2\vec{v} + 4\vec{w}|^2$, sabendo que $|\vec{v}| = 1$, $|\vec{w}| = 2$ e que a medida do ângulo entre \vec{v} e \vec{w} é 120° .
27. Mostre:
- A desigualdade de Cauchy-Schwartz $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$ usando a lei dos cossenos. Em que condições a desigualdade se torna uma igualdade.
 - A desigualdade $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (propriedade triangular). Em que condições a desigualdade se torna uma igualdade.
28. O coeficiente angular m_1 do vetor $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ é $\frac{b}{a}$. Mostre que se este vetor é perpendicular a uma reta $y = m_2x + c$ então m_1 é o recíproco negativo de m_2 . (Veja minhas notas sobre a resolução dos exercícios 33 e 34 da seção 12.3 do Thomas.)
29. Se $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = \vec{0}$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $|\vec{w}| = \frac{1}{2}$ e $|\vec{u}| = 2$, calcule $\vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}$.
30. Dado um vetor \vec{v} , não nulo ($\vec{v} \neq \vec{0}$), sendo α, β, γ os ângulos que o vetor \vec{v} forma com os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivamente, denominamos $\cos \alpha, \cos \beta$ e $\cos \gamma$ de cossenos diretores de \vec{v} .
- Se $\vec{v} = (x, y, z)$, prove que:
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases} \text{ .(Veja o exercício 15 da seção 12.3 do Thomas!!)}$$
 - Prove que $[\cos(\alpha)]^2 + [\cos(\beta)]^2 + [\cos(\gamma)]^2 = 1$.
 - Prove que as coordenadas de $\vec{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ são as coordenadas de um versor na direção e sentido de \vec{v} .
31. Uma arma com velocidade de saída de 400 m/s é disparada a um ângulo de 15° acima do horizonte. Encontre as componentes horizontal e vertical da velocidade.
32. A locomotiva Big Boy podia puxar trens de 6000 toneladas com uma força de tração de 602.148 N . Neste nível de força, cerca de quanto trabalho a locomotiva realizou na jornada de 605 Km (aproximadamente em linha reta) de São Francisco a Los Angeles?
33. Quanto trabalho é necessário para deslizar um engradado 20 m ao longo de um cais puxando-o com uma força de 200 N em um ângulo de 30° com a horizontal?
34. Um foguete de 2000 toneladas no campo gravitacional da Terra sobe com uma aceleração de 30 m/s^2 . Supondo que força da gravidade é constante dada por $P = mg$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$), calcule o trabalho realizado pelos motores desde a superfície da Terra até uma altura de 30 Km . Por que não podemos utilizar este procedimento para determinar o trabalho desde a superfície da Terra até o foguete entrar em órbita? Lembrete: A segunda lei de Newton nos diz $\vec{F}_R = m\vec{a}$ onde m é a massa, \vec{a} é a aceleração e \vec{F}_R é a força resultante (soma de todas as forças).