Produto vetorial - Duplo produto vetorial - Produto misto

1. Cálcule o produto vetorial dos seguintes conjuntos de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

   (a) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\ \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + 3\ \mathbf{k}$

   (b) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} -\ \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -3\mathbf{j} - 2\ \mathbf{k}$

   (c) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\ \mathbf{k}$

   (d) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\ \mathbf{k}$

   (e) $\mathbf{u} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$

   (f) $\mathbf{u} = \langle 2, 1, -1 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle 2, -4, 3 \rangle$

   (g) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right\rangle$ e $\mathbf{v} = \left\langle -\frac{2}{7}, \frac{4}{3}, 2 \right\rangle$

   (h) $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right\rangle$ e $\mathbf{v} = \left\langle 2, -\sqrt{45}, \sqrt{3} \right\rangle$

2. Calcule $\vec{v} \wedge \vec{w}$ e $\vec{w} \wedge \vec{v}$. Você pode ver o símbolo $\wedge$ como outra notação para $\times$. Em nosso curso, ambos indicam produto vetorial[1]. O símbolo $\times$ é, de longe, o mais utilizado em todas as áreas de ciências e engenharias para este fim, porém você poderá encontrar $\wedge$ em alguns livros de Matemática Pura e muito raramente em livros de áreas aplicadas. Caso a notação $\wedge$ apareça no enunciado de uma questão, ou em um item de uma questão, use a mesma na sua resposta.

   (a) $\vec{v} = (6, -2, -4)$ e $\vec{w} = (-2, -4, 2)$

   (b) $\vec{v} = (7, 0, -3)$ e $\vec{w} = (1, -2, 3)$

   (c) $\vec{v} = (1, -3, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, 2)$

   (d) $\vec{v} = (2, 1, 2)$ e $\vec{w} = (-4, -2, -4)$

3. Esboce os eixos das coordenadas e inclua os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ com início na origem.

   (a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{j}$

   (b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$

   (c) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\ \mathbf{k}$

   (d) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\ \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} +\ \mathbf{k}$

4. Sejam $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{r} = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + \frac{\pi}{2}\mathbf{k}$. Determine quais vetores são paralelos e quais são perpendiculares entre si.

5. Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{v} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{w} = (-5, 5, 5)$.

6. Se $\text{ang}\big(\vec{v}.\vec{w}\big) = 30°$, $|\,\vec{v}\,| = 1$ e $|\,\vec{w}\,| = 7$, calcule:

   (a) $|\,\vec{v} \wedge \vec{w}\,|$

   (b) $\left|\,\frac{1}{3}\vec{v} \times \frac{2}{3}\vec{w}\,\right|$.

[1] No contexto em que estamos, o símbolo $\wedge$ é mais freqüentemente usado para denotar o assim chamado “produto exterior” de dois vetores. O resultado de um produto exterior de vetores é um bivetor. Um bivetor corresponde a uma área orientada, do mesmo modo que um vetor corresponde a um segmento de reta orientado. O vetor produto vetorial é o dual de Hodge do produto exterior correspondente. São conceitos nos quais você poderá se aprofundar se optar por Matemática ou por algumas áreas da Física que usam muito a Cálculo de Formas Exteriores.

7. Encontre a área do triângulo determinado pelos pontos P, Q e R, e o versor perpendicular a este triângulo.

   (a) $P = (1, 2, 0)$, $Q = (1, 3, 0)$ e $R = (-1, 2, -1)$
   (b) $P = (-4, -2, 1)$, $Q = (1, 3, 1)$ e $R = (-1, 2, -2)$

8. Encontre as áreas dos paralelogramos cujos vértices são dados a seguir:

   (a) $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ e $D = (0, -1)$
   (b) $A = (-6, 0)$, $B = (3, 1)$, $C = (1, -4)$, e $D = (-4, 5)$

9. Encontre as áreas dos triângulos cujos vértices são dados a seguir:

   (a) $A = (0, 0)$, $B = (-2, 3)$ e $C = (3, 1)$
   (b) $A = (-6, 0)$, $B = (10, -5)$ e $C = (-2, 4)$

10. Encontre uma fórmula para a área de um triângulo com vértices (a_1, a_2), (b_1, b_2) e (c_1, c_2).

11. Se $A(1, -2, 3)$, $B(1, -1, 1)$ e $C(0, 0, 3)$:

   (a) Os pontos A,B e C são colineares?
   (b) Verifique se ABC é um triângulo.
   (c) Sendo $D = C + \overrightarrow{AB}$. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$.
   (d) Calcule a altura do paralelogramo relativa a base AB.
   (e) Calcule a altura do paralelogramo relativa a base AC.
   (f) Calcule a área do triângulo ABC.
   (g) Calcule a altura do triângulo ABC relativa ao vértice A.
   (h) Calcule a altura do triângulo ABC relativa ao vértice B.
   (i) Calcule a altura do triângulo ABC relativa ao vértice C.

12. Calcule a área e a altura relativa ao vértice B do triângulo ABC sendo $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 3)$.

13. Calcule a área e a altura relativa ao lado AB do paralelogramo $ABCD$ sendo $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (-2, -1, -4)$.

14. ABC é um triângulo, e P e Q são pontos tais que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC}$ e $3\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$. Calcule a razão entre as áreas dos triângulos BPQ e ABC.

15. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de lado unitário, calcule $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

16. Encontre o volume do paralelepípedo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e verifique a propriedade cíclica do produto misto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

   (a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = 2\mathbf{k}$
   (b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
   (c) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
   (d) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - \mathbf{5j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$

17. Calcule $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$, sendo $\vec{v} = (-1, -3, 1)$, $\vec{w} = (1, 0, 1)$ e $\vec{u} = (2, 1, 1)$.

18. Calcule o volume do tetraedro definido pelos vetores $\vec{v} = (4, -4, 0)$, $\vec{w} = (0, 1, 0)$ e $\vec{u} = (-2, -1, -1)$.

19. Calcule o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{v} = (1, -1, 0)$, $\vec{w} = (0, 1, 0)$ e $\vec{u} = (2, 1, 1)$.

20. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ dados $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0)$.

21. Dados $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 2)$ e $D = (0, -2, 1)$, determine:

(a) O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

(b) O volume do tetraedro formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$

(c) A altura do tetraedro formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ em relação ao vértice A.

(d) A altura do tetraedro formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ em relação ao vértice B.

(e) A altura do tetraedro formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ em relação ao vértice C.

(f) A altura do tetraedro formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ em relação ao vértice D.

22. Demostre as relações $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{w}$ e $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{v}$ para o conjunto de vetores do exercício anterior.

23. Prove que $\left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) \wedge \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = [\,\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\,]^2$

24. Prove que $|\,\vec{v} \wedge \vec{w}\,|^2 + \left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right)^2 = |\,\vec{v}\,|^2 |\,\vec{w}\,|^2$.

25. Prove que:

(a) $|\,\vec{v} \times \vec{w}\,|^2 \leq |\,\vec{v}\,|^2 |\,\vec{w}\,|^2$

(b) $|\,\vec{v} \wedge \vec{w}\,| = |\,\vec{v}\,|\,|\,\vec{w}\,|$ se, e somente se, $\vec{v} \perp \vec{w}$.

26. Calcule a magnitude do torque gerado pela força $\vec{F} = 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ aplicada no ponto Q a $5m$ do ponto pivô P. Considere a barra paralela ao eixo x. Determine o ângulo entre $\vec{F}$ e $\overrightarrow{PQ}$.

27. Se $\overrightarrow{OP} = (1, 1, 1)$. Calcule o momento em relação ao ponto O da força $\vec{F} = (-1, 3, 4)$ aplicada ao ponto P.

28. Resolva os sistemas para $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$:

(a) $\begin{cases} \mathbf{v} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \mathbf{v} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = 7 \end{cases}$

29. Mostre que o sistema $\begin{cases} (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \times \mathbf{v} = -\mathbf{i}+2\mathbf{j} \\ (\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v} = 4 \end{cases}$ não tem solução. Explique geometricamente porque isto ocorre.

30. Prove que

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{i}|^2 + |\mathbf{v} \times \mathbf{j}|^2 + |\mathbf{v} \times \mathbf{k}|^2 = 2\,|\mathbf{v}|^2 .$$

31. Prove a identidade de Jacobi:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = 0$$

32. Mostre que $((\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})) \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = 2\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$