THOMAS 12.3 - PARES

2. $\vec{v} = (3/5)\hat{i} + (4/5)\vec{k}$, $\vec{u} = 5\hat{i} + 12\hat{j}$

a) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{3}{5} \cdot 5 + 0 \cdot 12 + \frac{4}{5} \cdot 0 = 3$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

b) $\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|} = \frac{3}{1 \cdot 13} = \frac{3}{13}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{13}\right) \Leftarrow$$ Para achar o ângulo, se for pedido

Usando a calculadora

$\theta \approx \ldots$

c) $\mathcal{E} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3}{1} = 3$

d) $\text{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = 3\,\vec{v} =$

$$= 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}\right) = \frac{9}{5}\hat{i} + \frac{12}{5}\hat{j}$$

THOMAS 12.3 - PARES

4. $\vec{v} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$, $\vec{u} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

a) $\vec{v} \cdot \vec{u} = 2.2 + 10.2 - 11 =$

$= 4 + 20 - 11 = 13$

$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15$

$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$

b) $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{13}{3 . 15} = \dfrac{13}{45}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{13}{45}\right)$

Lembre que $\cos^{-1}$ é a função inversa do cosseno

c) $\mathcal{E} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{13}{15}$

d) $\text{Proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} =$

$= \dfrac{13}{15} \cdot \dfrac{1}{15} \left(2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}\right) =$

$= \dfrac{26}{225}\hat{i} + \dfrac{130}{225}\hat{j} - \dfrac{143}{225}\hat{k}$

NOTA

Lembre que a magnitude da projeção $\text{Proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ é a componente escalar.

THOMAS 12.3 – PARES

6. $\vec{v} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath}$, $\vec{u} = \sqrt{2}\,\hat{\imath} + \sqrt{3}\,\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

a) $\vec{v} \cdot \vec{u} = (-1).\sqrt{2} + 1.\sqrt{3} + 0.2 =$

$= \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|\vec{u}| = \sqrt{2+3+4} = \sqrt{9} = 3$

b) $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\right)$

c) $\mathcal{E} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

d) $\text{Proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \mathcal{E}\cdot\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{\imath}+\hat{\jmath}) =$

$= -\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\,\hat{\imath} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\,\hat{\jmath}$

OBSERVE QUE A PROJECÃO DE $\vec{u}$ EM $\vec{v}$ OU NA DIREÇÃO DE $\vec{v}$ É UM VETOR.

A COMPONENTE ESCALAR $\mathcal{E}$ É UM ESCALAR (NÚMERO REAL).

THOMAS 12.3 - PARES

8. $\vec{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$, $\vec{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1/2 + 1/3} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1/2 + 1/3} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

b) $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{1/6}{\left(\frac{5}{6}\right)^{1/2}\left(\frac{5}{6}\right)^{1/2}} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}$

c) $\mathcal{E} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1/6}{\sqrt{\frac{5}{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$

d) $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{30}} \left(\frac{\langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3} \rangle}{\sqrt{5}/\sqrt{6}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right\rangle$$

THOMAS 12.3 - PARES

10. $\vec{u} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2.3 - 2.0 + 1.4 = 6 + 4 = 10$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{10}{3.5} = \frac{10}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

12. $\vec{u} = \hat{i} + \sqrt{2}\,\hat{j} - \sqrt{2}\,\hat{k}$, $\vec{v} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = -1$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1 + 2 + 2} = \sqrt{5}$$

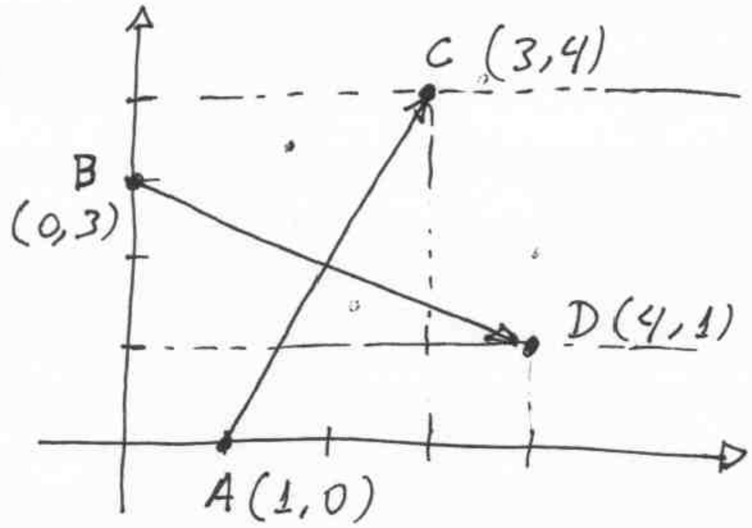
$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

THOMAS 12.3 – PARES

14.



POR MAIS SIMPLES QUE O PROBLEMA SEJA, FAÇA UMA

FIGURA!!

QUANDO VOCÊ ESTIVER MEIO NERVOSO(A), FAZENDO UMA PROVA, A FIGURA VAI AJUDAR!!!

As diagonais são

$\vec{BD}$ e $\vec{AC}$

SEJA ORGANIZADO(A).

$\vec{BD} = \langle 4-0, 1-3 \rangle = \langle 4, -2 \rangle$

$\vec{AC} = \langle 3-1, 4-0 \rangle = \langle 2, 4 \rangle$

$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 2.4 - 4.2 = 0$

VIU COMO EU ARRUMEI PARA FACILITAR FAZER OS PRODUTOS?

O produto escalar deu 0. Portanto $\vec{AC}$ e $\vec{BD}$ são ortogonais, ou seja, formam um ângulo reto (90°).

Seja explícito nas explicações de seus cálculos. AJUDE O PROFESSOR A LHE DAR 10!!!