Seqüências

Formalmente:

Uma função cujo domínio é um conjunto de inteiros.

Intuitivamente:

Uma lista ordenada de números.

O domínio:

- Usualmente os inteiros positivos mas pode-se começar com qualquer número.
- Pode ser finita, mas estaremos principalmente interessados em uma lista infinita.

Notação: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Termo Geral

Significado: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ \ldots \ , a_n, \ \ldots$

Exemplo:

$$\{2n-1\}_{n=1}^{\infty} = 1, 3, 5, 7, \ldots , 2n-1, \ldots$$

n pode começar em qualquer número e a_n não precisa ter fórmula

Como determinar o termo geral a partir de uma lista?

- Nenhum processo simples bem definido.
- Envolve reconhecimento de padrões.
- Verifique sua hipótese.

Dicas úteis (assumindo que n começa em 1):

- pares = 2n
- ímpares = 2n-1
- sinais alternantes : $(-1)^n$

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{5}, \frac{8}{6}, \bullet\bullet\bullet, \frac{2n}{n+2}, \bullet\bullet\bullet$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \bullet\bullet\bullet, \frac{1}{3^{n-1}}, \bullet\bullet\bullet$$

$$\frac{1}{7}, -\frac{2}{11}, \frac{6}{15}, -\frac{24}{19}, \bullet\bullet\bullet, (-1)^{n-1}\frac{n!}{4n+3}, \bullet\bullet\bullet$$

Encontre os três primeiros termos da seqüência ...

$$\left\{ \frac{3 - 5n + 6n^2 - n^3}{3} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$= 1, 3, 5, \bullet \bullet \bullet$$

Qual o termo geral? ~~Inteiros ÍMPARES!~~

$$= 1, 3, 5, 5, 1, -9, -27, \bullet \bullet \bullet$$

Cuidado com as conclusões apressadas!

Limite de uma seqüência

Dado: $\left\{ a_n \right\}_{n=1}^{\infty}$

No caso de seqüências $\boldsymbol{n} \in$ Z+ e $\boldsymbol{a_n}$ não é contínua. Assim, a definição de limite deve ser adaptada.

Ache: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Definição de limite quando $\boldsymbol{x} \to \infty$ e $\boldsymbol{f(x)}$ é uma função contínua.

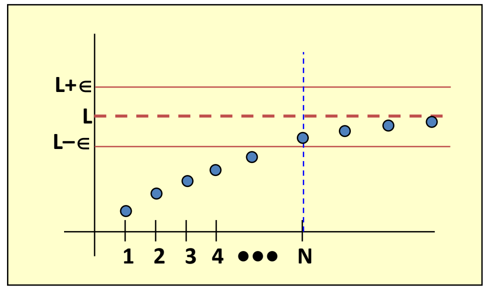
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N > 0$$

$$\text{tal que se } x > N, \text{ então } \left| f(x) - L \right| < \varepsilon.$$

Limite de uma seqüência

Dado: $\left\{ a_n \right\}_{n=1}^{\infty}$

Ache: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$



Definição de limite para $n \to \infty$ and $\{a_n\}$ uma seqüência.

$$\lim_{x \to \infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ um inteiro } N > 0$$

$$\text{tal que se } n \geq N \text{, então } \left| a_n - L \right| < \varepsilon.$$

Teoremas de limites para seqüências

Exatamente como para funções!

$$\lim_{n \to \infty} c = c$$

$$\lim_{n \to \infty} c a_n = c \lim_{n \to \infty} a_n$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \lim_{n \to \infty} b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \Big/ \lim_{n \to \infty} b_n \quad \text{se} \quad \lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$$

Também todos os métodos usados para funções se aplicam às seqüências.

NOTA: Seqüencias alternadas só podem convergir para 0. Por que?

Converge $\Leftrightarrow$ existe o limite

Diverge $\Leftrightarrow$ o limite não existe

Definição recursiva

Cada termo é determinado a partir dos anteriores.

$$x_1 = k \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

OU

$$x_1 = k_1 \qquad x_2 = k_2 \qquad x_{n+1} = f(x_{n-1}, x_n)$$

OU

… qualquer quantidade de termos anteriores …

Fibonacci : $x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$

Alguns limites comuns…

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

$|x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$$

$x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Note que, nestes limites, x permanece fixo.

A seqüência converge?

Muitas vezes o valor exato do limite de uma seqüência não é tão importante.

Pode-se determinar se uma seqüência converge sem calcular o limite?

Terminologia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Não-Decrescente: $a_n \le a_{n+1}$, para todo n

Não-crescente: $a_n \ge a_{n+1}$, para todo n

Crescente: $a_n < a_{n+1}$, para todo n

Decrescente: $a_n > a_{n+1}$, para todo n

Como você descreveria ? $\{5\}_{n=1}^{\infty}$

É crescente ou decrescente?

Dois testes

Diferença entre termos			Razão de termos sucessivos		
$a_{n+1} - a_n > 0$	$\Rightarrow$	crescente	$a_{n+1}/a_n > 1$	$\Rightarrow$	crescente
$a_{n+1} - a_n < 0$	$\Rightarrow$	decrescente	$a_{n+1}/a_n < 1$	$\Rightarrow$	decrescente
$a_{n+1} - a_n \geq 0$	$\Rightarrow$	não-decrescente	$a_{n+1}/a_n \geq 1$	$\Rightarrow$	não-decrescente
$a_{n+1} - a_n \leq 0$	$\Rightarrow$	não-crescente	$a_{n+1}/a_n \leq 1$	$\Rightarrow$	não-crescente

Determine o comportamento de $\left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

(use ambos os métodos)

Um teste usando derivadas

$\boxed{\text{Seja } f(x) \text{ uma função com } x \geq 1 \text{ e } f(x) = a_n \text{ sempre que } x = n.}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ crescente

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ decrescente

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ não decrescente

$f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ não-crescente

Determine o comportamento de $\left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Propriedades que nem sempre valem

Se um número finito de termos a partir do começo de uma seqüência são descartatos e a seqüência resultante tem uma propriedade, então a seqüência original tem a propriedade eventualmente.

Exemplo

Que podemos dizer acerca de: $$5, 2, -9, 3, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-3}{n-2}, \ldots$$

A seqüência é crescente eventualmente

(descarte os primeiros quatro termos)

Convergência de Seqüências

Se uma seqüência cresce ou não decresce eventualmente há duas possibilidades:

1. $\exists$ M (cota superior) para o qual todo $a_n \leq M$ e a seqüência converge para um valor $L \leq M$.
2. Não há cota superior e a seqüência vai a infinito quando $n \to \infty$.

Nota: Note que no primeiro caso basta encontrar M para garantir convergência sem a necessidade de achar L.

L = "a menor cota superior"

Se uma seqüência decresce ou não cresce eventualmente, há duas possibilidades:

1. $\exists$ M (cota inferior) para o qual $a_n \geq M$ e a seqüência converge para um valor $L \geq M$.
2. Não existe cota inferior e a seqüência vai a menos infinito quando $n \to \infty$.

L = "a maior cota inferior"

Convergência de seqüências

Exemplos

$$\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$$

Eventualmente decrescente e sempre positiva. (POr que?)

Então converge . (Por que?)

$$\left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \right\}$$

Eventualmente crescente, sem cota superior. (Por que?)

Então diverge. (Por que?)