

Somas de termos de seqüências

$$\left\{ \frac{3}{10^n} \right\}_{n=1}^{\infty} = 0.3, 0.03, 0.003, 0.0003, \dots$$

Adicionando estes termos temos ...

$$0.3333\dots = \frac{1}{3}$$

Séries Infinitas

A soma dos termos de uma seqüência infinita é chamada **série infinita**

Notação:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

NOTAS:

- a_k é uma função de k cujo domínio é um conjunto de inteiros.
- k pode começar em qualquer valor (0 ou 1 é o valor mais comum)
- Estas expressões dirão a mesma coisa: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n$

Somas parciais de uma série infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \end{array} \right\} \left\{ s_n \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Seqüência de somas parciais.

Definição recursiva: $s_n = s_{n-1} + a_n$

Séries convergentes e divergentes

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Se $\left\{ s_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge para S ,

então a série converge e

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

Se a seqüência de somas parciais diverge então a série diverge (não tem soma).

S costuma não ser fácil de determinar!

Exemplo ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

$$s_1 = \frac{1}{2}$$

Padrão?

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

NOTA: Uma expressão geral para s_n é normalmente difícil de determinar.

Séries Geométricas

Cada termo é obtido multiplicando o predecessor por uma constante fixa.

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{3}{10} \\ r = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

NOTA: k pode começar de qualquer valor (normalmente 0 or 1).

Séries Geométricas

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

- **a** é o valor do primeiro termo
- **r** é a razão
 - $r > 0$, todos os termos têm o mesmo sinal
 - $r < 0$, os sinais alternam

Séries Geométricas $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$

Sob que condições uma série geométrica converge?

Caso 1a: $r = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a = a + a + a + \dots$$

$$s_n = an \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

Divergente!

Série Geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$

Sob que condições uma série geométrica converge?

Caso 1b: $r = -1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a(-1)^{k-1} = a - a + a - \dots$$

$$s_n = \begin{cases} a, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \text{NE}$$

Divergente!

Série Geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$

Sob que condições uma série geométrica converge?

Caso 2: $|r| \neq 1$

$$\begin{array}{l} \text{vezes} \left[\begin{array}{l} s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \\ r \left[\begin{array}{l} rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

subtraia

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} (1 - r^n)$$

Séries Geométricas $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$

Sob que condições uma série geométrica converge?

Caso 2: $|r| \neq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & \text{se } |r| < 1 \\ \infty, & \text{se } |r| > 1 \end{cases}$$

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} (1 - r^n)$$

Convergente se $|r| < 1$ e divergente em outros casos

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & \text{se } |r| < 1 \\ \infty, & \text{se } |r| > 1 \end{cases}$$

Determine as seguintes somas se existirem ...

$$12 - 6 + 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{3^k}$$

Séries telescópicas

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - b_k = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots$$

onde $b_n = a_{n+1}$

$$s_n = a_1 - b_n$$

Portanto, se ...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \begin{cases} L, & \text{então a série converge para } a_1 - L \\ \text{NE or } \pm \infty, & \text{então a série diverge} \end{cases}$$

Séries telescópicas - Exemplos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Séries telescópicas - Exemplos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)} - \frac{3}{(2n+1)}$$

Dica: "frações parciais"

Teste do enésimo termo

Se $\sum a_k$ converge, então $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Prova ...

a_k é o k-ésimo termo

s_k é a k-ésima soma parcial

$$a_k = s_k - s_{k-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = S - S = 0$$

O teste do enésimo termo, também chamado teste da divergência

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$, então $\sum a_k$ diverge.

NOTA: $p \Rightarrow q$ não implica que $q \Rightarrow p$

Propriedades algébricas das séries infinitas

Se ... $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$... são convergentes ...

... então ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$$

... é convergente.

NOTA: $p \Rightarrow q$ não implica que $q \Rightarrow p$.

Propriedades algébricas das séries infinitas

Se $c \neq 0$

... então ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

... são ambas convergentes ou divergentes.

Propriedades algébricas das séries infinitas

Se $K > 0$

Ou seja, um número finito de termos pode ser adicionado ou removido de uma série sem alterar sua convergência ou divergência.

... então ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \& \quad \sum_{k=K}^{\infty} a_k$$

... são ambas convergentes ou divergentes.

Propriedades algébricas das séries infinitas

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=m+n}^{\infty} a_{k-n} = \sum_{k=m-n}^{\infty} a_{k+n}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k}{k!} &= \sum_{k=5}^{\infty} \frac{5(k-4)}{(k-4)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5(k+1)}{(k+1)!} \end{aligned}$$

“Mudança de índice” ou “reindexação”