# Séries telescópicas

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - b_k = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots$$

onde $b_n = a_{n+1}$

$$s_n = a_1 - b_n$$

Portanto, se ...

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \begin{cases} L, \text{ então a série converge para } a_1 - L \\ \text{NE ou } \pm\infty, \text{ então a série diverge} \end{cases}$$

# Séries telescópicas - Exemplos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

# Séries telescópicas - Exemplos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(2n-1)} - \frac{3}{(2n+1)}$$

Dica: “frações parciais”

# Teste do enésimo termo

$$\text{Se } \sum a_k \text{ converge, então } \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

---

**Prova ...**

$a_k$ é o k-ésimo termo

$s_k$ é a k-ésima soma parcial

$$a_k = s_k - s_{k-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = S - S = 0$$

---

O teste do enésimo termo, também chamado teste da divergência

$$\text{Se } \lim_{k\to\infty} a_k \neq 0, \text{ então } \sum a_k \text{ diverge.}$$

**NOTA: p $\Rightarrow$ q não implica que q $\Rightarrow$ p**

# Propriedades algébricas das séries infintas

Se ... $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ... são convergentes ...

... então ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$$

... é convergente.

**NOTA: p $\Rightarrow$ q não implica que q $\Rightarrow$ p.**

# Propriedades algébricas das séries infinitas

Se $c \neq 0$

… então …

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

… são ambas convergentes ou divergentes.

# Propriedades algébricas das séries infinitas

Se $K > 0$

**Ou seja, um número finito de termos pode ser adicionado ou removido de uma série sem alterar sua convergência ou divergência.**

… então …

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=K}^{\infty} a_k$$

… são ambas convergentes ou divergentes.

# Propriedades algébricas das séries infinitas

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=m+n}^{\infty} a_{k-n} = \sum_{k=m-n}^{\infty} a_{k+n}$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k}{k!} = \sum_{k=5}^{\infty} \frac{5(k-4)}{(k-4)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5(k+1)}{(k+1)!}$$

**"Mudança de índice" ou "reindexação"**

# A série harmônica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= s_1 + \frac{1}{2} \\ s_3 &= s_2 + \frac{1}{3} \\ &\bullet\bullet\bullet \\ s_n &= s_{n-1} + \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \quad \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$$

É uma seqüência estritamente crescente

**Converge se tem uma cota superior.**

# A série harmônica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$s_4 = s_{2^2} = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

$$s_{2^n} > \frac{n+1}{2}$$

**Já que para cada possível cota superior $M$ você pode achar um $n$ para o qual ...**

$$\frac{n+1}{2} > M$$

**Diverge** **porque não tem cota superior.**

# O teste da integral

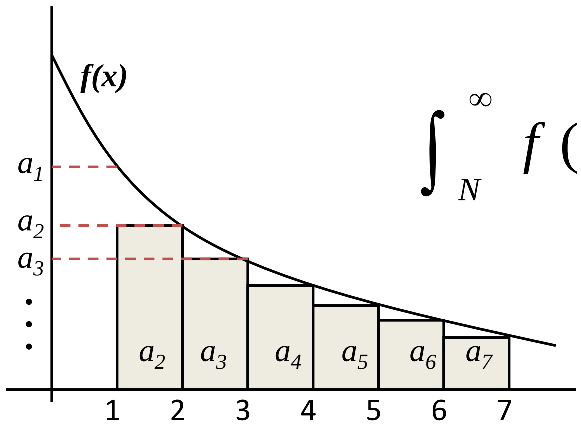
**NOTA:**

Para todas as séries nesta seção assumiremos que cada termo é não negativo.

Ou seja, $a_k \geq 0, \ \forall k$

# O teste da integral $\sum a_k$

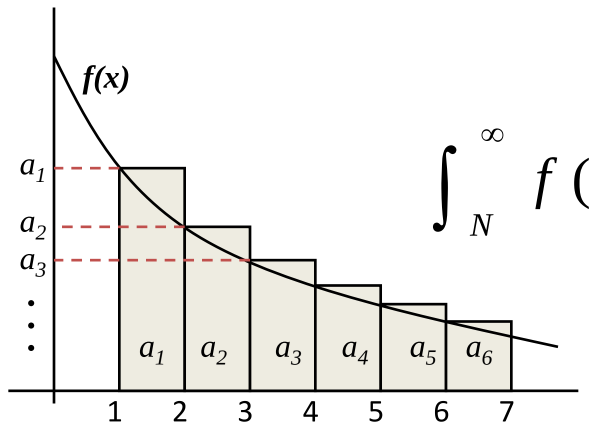
Seja $f(x)$ uma função decrescente contínua no domínio $[N,\infty)$ tal que $f(k)=a_k$ para todo $k \geq N$.




$$\int_N^\infty f(x)dx \geq \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$$

**∴ Se a integral converge, então a série converge.**

Cota superior para a sequëncia crescente de somas parciais.




$$\int_N^\infty f(x)dx \leq \sum_{k=N}^{\infty} a_k$$

**∴ Se a integral diverge, então a série diverge.**

**NÃO HÁ** cota superior para a sequëncia crescente de somas parciais..

# Exemplos

$$\sum \frac{k}{1+k^2} \qquad \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^{\infty}\frac{1}{u}\,dx = \frac{1}{2}\ln|u|\Big]_2^{\infty} = \infty$$

**∴ Divergente!**

$$\sum \frac{1}{(4+2k)^{3/2}} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{(4+2x)^{3/2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_6^{\infty}\frac{1}{u^{3/2}}\,dx = -\frac{1}{u^{1/2}}\Big]_6^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

**∴ Convergente!**

Qual a limitação do teste? Integrais difíceis

# p-Séries $\sum \frac{1}{k^p}$

**p=1**

$$\sum \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

A série harmônica que é divergente.

**p=2**

$$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

**p=1/2**

$$\sum \frac{1}{k^{1/2}} = \sum \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$$

# p-Séries $\sum \frac{1}{k^p}$

para p $\leq 0$

$$\sum \frac{1}{k^p} = \sum k^{-p} = \sum k^q$$

**Nota: -p = q $\geq$ 0**

$$\lim_{k \to \infty} k^q = \infty$$

**$\therefore$ Divergente** **(pelo teste do enésimo termo)** **se p $\leq$ 0**

# p-Séries $\sum \frac{1}{k^p}$

Para p ≠ 1 e p > 0

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \int_1^{\infty} x^{-p} = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{\infty} = \lim_{b \to \infty}\left[\frac{b^{1-p}}{1-p}\right] - \frac{1}{1-p}$$

**∴ Convergente se p > 1**

**∴ Divergente se 0 < p ≤ 1**