

Trabalho Individual

Resolver os exercícios 9 até 28 da seção 11.8. do Thomas
 (Vou colocar os enunciados na página)
 VALOR: 2,0

Data da entrega: até **28/08/2009**

Definição Série de potências, centro, coeficientes

Uma **série de potências centrada em $x = 0$** é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad (1)$$

Uma **série de potências centrada em $x = a$** é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots \quad (2)$$

na qual o **centro** a e os **coeficientes** $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ são constantes.

EXEMPLO 1 Uma série geométrica

Tomando-se todos os coeficientes como 1 na Equação (1) nos faz chegar à série de potências geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Esta é a série geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão x . Ela converge para $1/(1-x)$ para $|x| < 1$. Expressamos isso escrevendo

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1 \quad (3)$$

slide 3

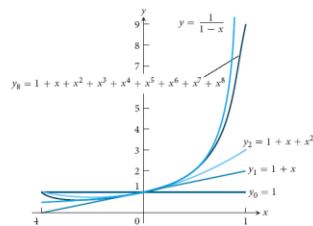


FIGURA 11.10 Os gráficos de $f(x) = 1/(1-x)$ e quatro de seus polinômios aproximadores (Exemplo 1).

$\left| \frac{x-2}{2} \right| < 1$ ou $0 < x < 4$. A soma é

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}$$

assim

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} &= 1 - \frac{(x-2)}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \cdots \\ &+ \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \quad 0 < x < 4 \end{aligned}$$

A série (4) gera aproximações polinomiais úteis de $f(x) = 2/x$ para valores de x próximos de 2:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{x}{2}$$

$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

e assim por diante (Figura 11.11).

EXEMPLO 2 Uma série geométrica

A série de potências

$$1 - \frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{4}(x - 2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x - 2)^n + \cdots \quad (4)$$

combina com a Equação (2) com $a = 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = -1/2$, $c_2 = 1/4$, \dots , $c_n = (-1/2)^n$. Esta é uma série geométrica com primeiro termo 1 e razão $r = -\frac{x-2}{2}$. A série converge para

slide 5

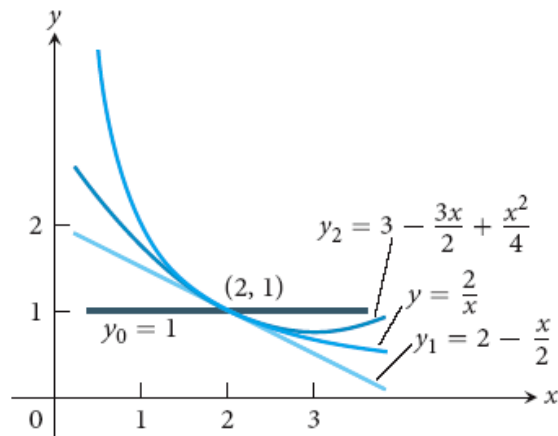


FIGURA 11.11 Os gráficos de $f(x) = 2/x$ e suas três primeiras aproximações polinomiais (Exemplo 2).

slide 6

Teorema 18 Teorema da convergência para séries de potências

Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ convergir para $x = c \neq 0$, então ela convergirá absolutamente para todo x com $|x| < |c|$. Se a série divergir para $x = d$, então ela divergirá para todo x com $|x| > |d|$.

Corolário do Teorema 18

A convergência de séries $\sum_n (x - a)^n$ é descrita por uma das três possibilidades a seguir:

1. Existe um número positivo R tal que a série diverge para x com $|x - a| > R$, mas converge absolutamente para x com $|x - a| < R$. A série pode ou não convergir em uma das extremidades $x = a - R$ e $x = a + R$.
2. A série converge absolutamente para todo x ($R = \infty$).
3. A série converge em $x = a$ e diverge em todos os outros pontos ($R = 0$).

slide 7

Como testar a convergência de uma série de potências

1. Use o teste da razão (ou o teste da raiz para o n -ésimo termo) para encontrar o intervalo onde a série converge absolutamente. Geralmente, esse intervalo é aberto.

$$|x - a| < R \quad \text{ou} \quad a - R < x < a + R$$

2. Se o intervalo de convergência absoluta for finito, teste a convergência ou a divergência em cada extremidade, como nos exemplos 3(a) e (b). Use o teste de comparação, o teste da integral ou o teste da série alternada.
3. Se o intervalo de convergência absoluta for $a - R < x < a + R$, a série diverge para $|x - a| > R$ (ela nem mesmo converge condicionalmente), pois o n -ésimo termo não se aproxima de zero para esses valores de x .

slide 8

Teorema 19 O teorema da derivação termo a termo

Se $\sum c_n (x - a)^n$ converge para $a - R < x < a + R$ para algum $R > 0$, isso define uma função f :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n, \quad a - R < x < a + R$$

Tal função f tem derivadas de todas as ordens dentro do intervalo de convergência. As derivadas podem ser obtidas por meio da derivação da série original termo a termo:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x - a)^{n-2},$$

e assim por diante. Cada uma dessas séries derivadas converge em todo ponto interior do intervalo de convergência da série original.

slide 9

EXEMPLO 4 Aplicando a derivação termo a termo

Encontre as séries para $f'(x)$ e $f''(x)$ se

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

slide 10

Teorema 20 Teorema da integração termo a termo

Suponha que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

convirja para $a - R < x < a + R$ ($R > 0$). Então,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1}$$

converge para $a - R < x < a + R$ e

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x - a)^{n+1}}{n + 1} + C$$

para $a - R < x < a + R$.

slide 11

EXEMPLO 5 Uma série para $\text{tg}^{-1} x$, $-1 \leq x \leq 1$

Identifique a função

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad -1 \leq x \leq 1$$

SOLUÇÃO Derivamos a série original termo a termo e obtemos

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots, \quad -1 < x < 1$$

Esta é uma série geométrica com primeiro termo 1 e razão $-x^2$, assim

$$f'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Agora podemos integrar $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ para obter

$$\int f'(x) dx = \int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{tg}^{-1} x + C$$

A série para $f(x)$ é zero quando $x = 0$, assim $C = 0$. Por essa razão,

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \text{tg}^{-1} x, \quad -1 < x < 1 \quad (7)$$

Na Seção 11.10, veremos que a série também converge para $\text{tg}^{-1} x$ em $x = \pm 1$.

slide 12

EXEMPLO 6 Uma série para $\ln(1+x)$, $-1 < x \leq 1$

A série

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

converge no intervalo aberto $-1 < t < 1$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \Bigg|_0^x && \text{Teorema 20} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Também se pode mostrar que a série converge em $x = 1$ para o número $\ln 2$, mas isso não é garantido pelo teorema.

slide 13