Teorema 21 **O teorema da multiplicação de séries de potências**

Se $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < R$, e

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

então $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente para $A(x)\,B(x)$ para $|x| < R$:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

slide 1

EXEMPLO 7 Multiplique a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{para } |x| < 1$$

por ela mesma para obter uma série de potências para $1/(1-x)^2$, para $|x| < 1$.

SOLUÇÃO Sejam

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1-x)$$

e

$$c_n = \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0}_{n+1 \text{ termos}}$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ unidades}} = n + 1$$

Então, pelo teorema da multiplicação de séries,

$$A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

é a série para $1/(1-x)^2$. A série toda converge absolutamente para $|x| < 1$.

O Exemplo 4 dá a mesma resposta porque

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

slide 2

Definições Séries de Taylor e de Maclaurin

Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então, a **série de Taylor gerada por f em $x = a$ é**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

A série de Maclaurin gerada por f é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

a série de Taylor gerada por f em $x = 0$.

slide 3

EXEMPLO 1 Encontrando uma série de Taylor

Encontre a série de Taylor gerada por $f(x) = 1/x$ em $a = 2$. Se a série converge para $1/x$, onde isso ocorre?

SOLUÇÃO Precisamos encontrar $f(2), f'(2), f''(2), \ldots$ Derivando, obtemos

$$f(x) = x^{-1} \qquad f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -x^{-2} \qquad f'(2) = -\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x) = 2!x^{-3} \qquad \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$f'''(x) = -3!x^{-4} \qquad \frac{f'''(2)}{3!} = -\frac{1}{2^4}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)} \qquad \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

A série de Taylor é

$$f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots$$

Esta é uma série geométrica com primeiro termo $1/2$ e razão $r = -(x-2)/2$. Ela converge absolutamente para $|x-2| < 2$, e sua soma é

$$\frac{1/2}{1 + (x-2)/2} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x}$$

Nesse exemplo, a série de Taylor gerada por $f(x) = 1/x$ em $a = 2$ converge para $1/x$ para $|x-2| < 2$ ou $0 < x < 4$.

slide 4

Definição **Polinômio de Taylor de ordem n**

Seja f uma função com derivadas de ordem k para $k = 1, 2, \ldots, N$ em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então, para qualquer inteiro n de 0 a N, o **polinômio de Taylor de ordem n** gerado por f em $x = a$ é o polinômio

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

slide 5

EXEMPLO 2 Encontrando polinômios de Taylor para e^x

Encontre a série de Taylor e os polinômios de Taylor gerados por $f(x) = e^x$ em $x = 0$.

SOLUÇÃO Como

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad \ldots$$

temos

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \ldots$$

A série de Taylor gerada por f em $x = 0$ é

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Pela definição, essa também é a série de Maclaurin para e^x. Na Seção 11.9, veremos que a série converge para e^x para todo x.

O polinômio de Taylor de ordem n em $x = 0$ é

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Veja a Figura 11.12.

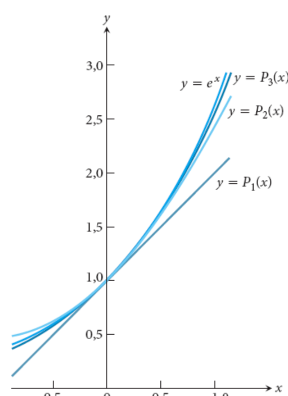

FIGURA 11.12 O gráfico de $f(x) = e^x$ e seus polinômios de Taylor
$P_1(x) = 1 + x$
$P_2(x) = 1 + x + (x^2/ 2!)$
$P_3(x) = 1 + x + (x^2/ 2!) + (x^3/ 3!)$
Note a proximidade dos gráficos perto do centro $x = 0$ (Exemplo 2).

6

EXEMPLO 3 Encontrando polinômios de Taylor para cos x

Encontre a série e os polinômios de Taylor gerados por $f(x) = \cos x$ em $x = 0$.

SOLUÇÃO O cosseno e suas derivadas são

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\text{sen } x \\ f''(x) &= -\cos x & f^{(3)}(x) &= \text{sen } x \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x & f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \text{sen } x \end{aligned}$$

Em $x = 0$, os cossenos são 1 e os senos, 0, assim

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

A série de Taylor gerada por f em 0 é

$$\begin{aligned} &f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Pela definição, essa também é a série de Maclaurin para cos x. Na Seção 11.9, veremos que a série converge para cos x para todo x.

Como $f^{(2n+1)}(0) = 0$, os polinômios de Taylor de ordem $2n$ e $2n + 1$ são idênticos:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

A Figura 11.13 mostra quão bem esses polinômios aproximam $f(x) = \cos x$ perto $x = 0$. Apenas as partes à direita do gráfico são dadas, pois os gráficos são simétricos em relação ao eixo y.

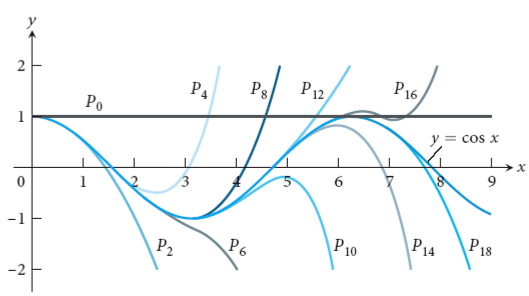

FIGURA 11.13 Os polinômios

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

convergem para cos x quando $n \to \infty$. Podemos deduzir o comportamento arbitrariamente distante de cos x conhecendo somente os valores do cosseno e suas derivadas em $x = 0$ (Exemplo 3).

TABELA 11.1 Séries de Taylor freqüentes

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\,\mathrm{tgh}^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\mathrm{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \leq 1$$

Séries binomiais

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1$$

onde,

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad \text{para } k \geq 3.$$

***Observação*:** Para escrever a série binomial de maneira compacta, é comum definir $\binom{m}{0}$ como 1 e tomar $x^0 = 1$ (mesmo no caso normalmente excluído onde $x = 0$); o que nos dá $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$. Se m é um *inteiro positivo*, a série termina em x^m e o resultado converge para todo x.