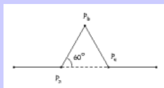
Comprimento da curva de Koch

$$Comprimento = 1$$

Uma iteração

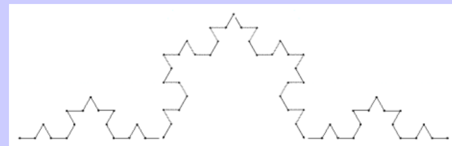


$$Comprimento = \frac{4}{3}$$

Duas iterações

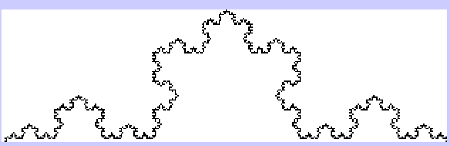
$$Comprimento = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Três iterações



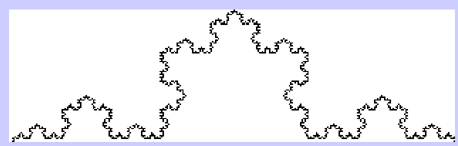
$$Comprimento = \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

n iterações



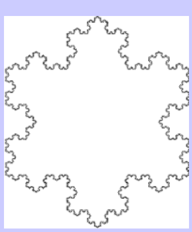
$$Comprimento = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Depois de infinitas iterações



$$Comprimento = \left(\frac{4}{3}\right)^\infty = \infty$$

O perímetro desta “ilha” limitada pelas curvas de Koch é infinito



. . . mas a área da “ilha” é finita (observe que esta área é limitada pelo quadrado)

Atividade para casa: calcule a área limitada pela curva de Koch.

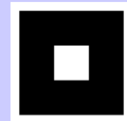
A curva de Koch tem emprego tecnológico:

http://www.fractenna.com

Fractal Tiling Arrays -- Firm Reports Breakthrough in Array Antennas

Boston - Mar 13, 2002
Fractal Antenna Systems, Inc. today disclosed that it has filed for patent protection on a new class of antenna arrays that use close-packed arrangements of fractal elements to get superior performance characteristics.

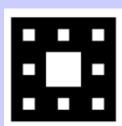
O tapete de Sierpinski



perímetro= 4(3) + 4(1)

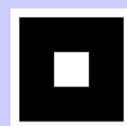
área = $3^2 - 1^2$

Vamos começar com um quadrado com lado de comprimento 3.



perímetro= $4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$

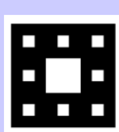
área = $3^2 - 1^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$



perímetro = $4 \cdot 3 + 4 \cdot 1$

área = $3^2 - 1^2$

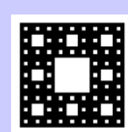
Vamos iterar.



perímetro= $4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$

área = $3^2 - 1^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

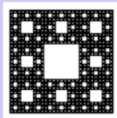
Vamos iterar



perímetro = $4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + 8^2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

área = $3^2 - 1^2 - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2 \cdot 2}$

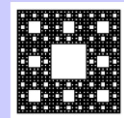
Vamos iterar.



$$\text{perímetro} = 4\cdot 3 + 4\cdot 1 + 8\cdot 4\cdot \frac{1}{3} + 8^2\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8^3\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\text{área} = 3^2 - 1^2 - 8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 2} - 8^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 3}$$

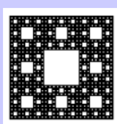
Vamos iterar.



$$\text{perímetro} = 4\cdot 3 + 4\cdot 1 + 8\cdot 4\cdot \frac{1}{3} + 8^2\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8^3\cdot 4\cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots$$

$$= 4\cdot 3 + \sum_{n=0}^{\infty} 4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^n$$

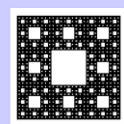
$$= \infty$$



$$\text{área} = 3^2 - 1^2 - 8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 2} - 8^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 3} - \ldots$$

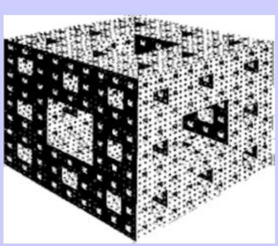
$$= 3^2 - \left[1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= 3^2 - \left(\frac{1}{1-\frac{8}{9}}\right) = 0$$



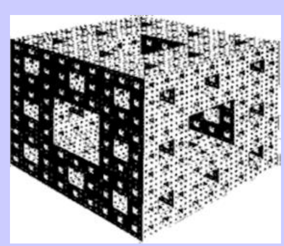
Então o tapete de Sierpinski tem um perímetro infinito mas limita uma região de área nula!!!!

Esquisito



O análogo tridimensional do tapete de Sierpinski é a **esponja de Menger**

Para casa: calcule a dimensão fractal da esponja de Menger.



A área da superfície é infinita, mas o volume delimitado é nulo.