O mapeamento logístico

Deilson de Melo Tavares
Escola de Ciências e Tecnologia
UFRN

Thomas Robert Malthus

A teoria de Malthus

Thomas Malthus era um pastor anglicano e um erudito que trabalhou em Demografia e Economia Política.

Malthus trouxe à tona a idéia de que uma população sem restrições de crescimento não pode ser sustentada pelo planeta.

$$\Delta N_t = A N_t$$

$$N_{t+1} - N_t = A N_t$$

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + A \equiv B$$

http://www.worldometers.info/population/

Pierre François Verhulst

O modelo de May-Verhulst

Verhulst, um matemático belga, propôs um modelo no qual a população seria limitada por uma "capacidade de sustentação" do ambiente.

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = 1 + A \equiv B$$

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = B\left(1 - N_t\right)$$

$$N_{t+1} = BN_t\left(1 - N_t\right)$$

$$0 \leq N_t \leq 1, \quad 0 \leq B \leq 4$$

http://www.worldometers.info/population/

Ponto fixo

$$ax^* + b = x^*$$

$$ax^* - x^* = -b$$

$$\left(a - 1\right)x^* = -b$$

$$x^* = \frac{b}{1 - a}$$

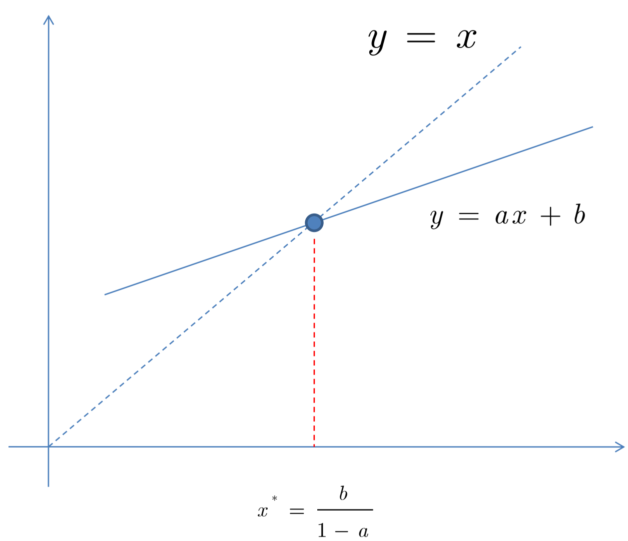


Diagrama de Verhulst

Progressão geométrica:

$$q = \frac{\left|y_{t+1} - y_t\right|}{\left|x_{t+1} - x_t\right|} = \frac{\left|y_{t+1} - x_{t+1}\right|}{\left|y_t - x_t\right|} = \left|\tan\theta\right|$$

Convergente:

$$\left|\tan\theta\right| < 1$$

Divergente:

$$\left|\tan\theta\right| > 1$$

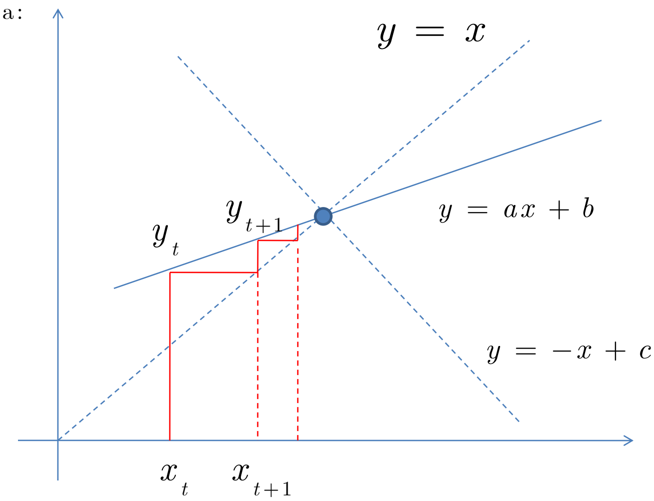


Diagrama de Verhulst

Progressão geométrica:

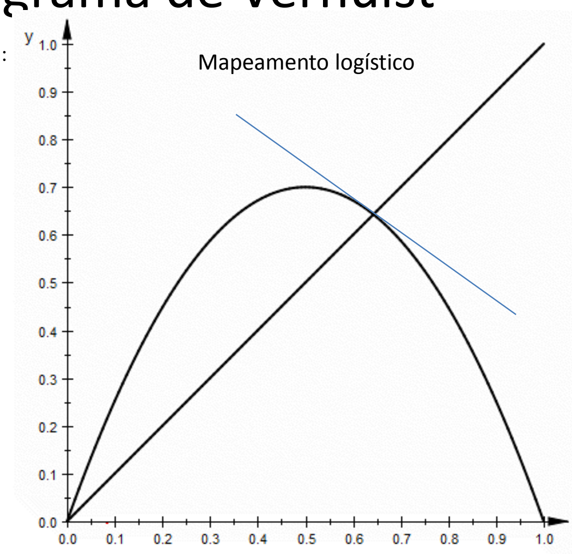
$$q = \frac{\left|y_{t+1} - y_t\right|}{\left|x_{t+1} - x_t\right|} = \frac{\left|y_{t+1} - x_{t+1}\right|}{\left|y_t - x_t\right|} = \left|\tan\theta\right|$$

Convergente:

$$\left|\tan\theta\right| < 1$$

Divergente:

$$\left|\tan\theta\right| > 1$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Verhulst_diagram

Pontos fixos do ML

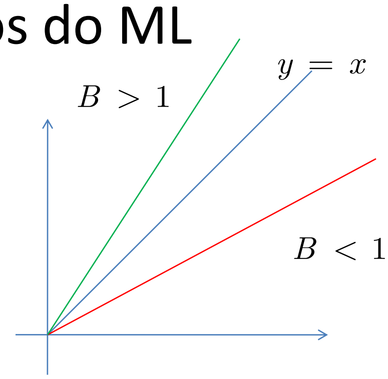
$$N_{t+1} = BN_t\left(1 - N_t\right) \quad \rightarrow \quad y = Bx\left(1 - x\right)$$

$$x^* = Bx^*\left(1 - x^*\right)$$
$$x^* = Bx^* - Bx^{*2}$$

$$Bx^{*2} + \left(1 - B\right)x^* = 0 \quad \Rightarrow \quad x^*\left[Bx^* + \left(1 - B\right)\right] = 0$$

$$x^* = 0 \qquad x^* = \frac{B - 1}{B}$$

Pontos fixos do ML



$$x_1^* = 0 \qquad x_2^* = \frac{B - 1}{B}$$

$$-\infty < x_2^* \leq 3/4$$

$$x_2^* > 0 \;\Rightarrow\; B - 1 > 0 \;\Rightarrow\; B > 1$$

$$y = Bx\left(1 - x\right), \qquad y = Bx - Bx^2 \approx Bx, \quad 0 < x \ll 1$$